Feuille d'exercices n°07

Exercice 1 (*)

Nature de la série de terme général :

1. $e^{-\sqrt{\ln(n)}}$
2. $\ln(\operatorname{th}(n))$
3. $\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}$

Exercice 2 (**)

Nature de la série de terme général :

1. $\dfrac{\sum_{k=1}^{n} k!}{(n+1)!}$
2. $\operatorname{th}(n)^n$
3. $\dfrac{\ln(n)^n}{n!}$

Exercice 3 (**)

Nature de la série de terme général :

1. $\sin\left(\pi\sqrt{1+n^2}\right)$
2. $\sqrt{n+(-1)^n} - \sqrt{n}$
3. $\sin\left(\pi(2+\sqrt{3})^n\right)$

Exercice 4 (*)

Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 2} \dfrac{1}{n\ln(n)^\beta}$ en fonction du paramètre $\beta \in \mathbb{R}$.

Exercice 5 (*)

Étudier la nature de la suite de terme général $u_n = \sum_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k\ln(k)} - \ln(\ln(n))$.

Exercice 6 (**)

Soit $\alpha > 0$. Nature des séries de terme général :

1. $\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}$
2. $\dfrac{1}{\sum_{k=1}^{n} k^\alpha}$
3. $\ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$

Exercice 7 (**)

Soit $f \in \mathscr{C}_{pm}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ fonction décroissante de limite nulle en $+\infty$. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t$$

Étudier la nature de la série $\sum u_n$ puis la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 8 (*)

Vérifier la convergence puis calculer la somme des séries suivantes :

1. $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{n(n+1)}$

2. $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{\cos(n)}{2^n}$

Exercice 9 (**)

Vérifier la convergence puis calculer la somme des séries suivantes :

1. $\sum\limits_{n \geqslant 2} \ln\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)$

2. $\sum \dfrac{(-1)^n}{3n+1}$

Exercice 10 (**)

1. Montrer $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2 \qquad \operatorname{Arctan}(x) - \operatorname{Arctan}(y) = \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{x-y}{1+xy}\right)$

2. Convergence puis somme de la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{1+n+n^2}\right)$

Exercice 11 (**)

Nature des séries de terme général :

1. $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{\operatorname{th}(k)}{k\sqrt{k}}$

2. $(-1)^n \dfrac{1}{n^2} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{k}}$

3. $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{1}{k \ln(k)^2}$

Exercice 12 (**)

Soit $(u_n)_n$ la suite réelle définie par $\begin{cases} u_{n+1} = \ln(\mathrm{e} - 1 + u_n) \\ u_0 > 1 \end{cases}$.

Montrer que $u_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \ell$ avec ℓ un réel à préciser puis déterminer la nature de la série $\sum (u_n - \ell)$.