ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Feuille d'exercices n°08

Exercice 1 (***)

Nature de la série de terme général :

1. $\sin(2\pi n!\mathrm{e})$
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n}$
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^n}$

Exercice 2 (***)

Montrer
$$\int_0^1 \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{t}} \right\rfloor \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

Exercice 3 (***)

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de réels strictement positifs tels que
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{avec} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$
et soit $(v_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $v_n = \dfrac{1}{n^\beta}$ avec $\beta > 0$.

1. Si $\alpha > 1$, choisir $\beta \in]\,1\,;\alpha\,[$, comparer $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ à $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et en déduire la convergence de $\sum_{n\geqslant 1} u_n$.
2. Compléter l'étude pour $\alpha < 1$ et $\alpha = 1$.

Exercice 4 (**)

Soit $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$. On note $\mathrm{A}_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ pour n entier avec $\mathrm{A}_0 = 0$ pour convention.

1. Montrer
$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \mathrm{A}_n b_n - \sum_{k=1}^{n-1} \mathrm{A}_k (b_{k+1} - b_k)$$
2. Application : pour θ réel, déterminer la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{\sin(n\theta)}{n}$.

Exercice 5 (****)

Étudier la convergence de la suite $(u_n)_n$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = \sin(u_n)$ puis déterminer un équivalent simple de u_n lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 6 (***)

Soit $(u_n)_n$ la suite réelle définie par $\begin{cases} u_{n+1} = \mathrm{Arctan}\,(u_n) \\ u_0 > 0 \end{cases}$.

Montrer que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ puis déterminer la nature de la série $\sum u_n$.