Feuille d'exercices n°09

Exercice 1 (***)

Soit $(u_n)_n$ la suite définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2+u_n}$ pour n entier.
Montrer $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$ avec ℓ un réel à préciser puis déterminer la nature de la série $\sum(u_n - \ell)$.

Corrigé : Posons $f(x) = \dfrac{1}{2+x}$ pour $x \geqslant 0$. On a $f(x) \geqslant 0$ pour $x \geqslant 0$ d'où $u_n \geqslant 0$ pour tout n entier par récurrence immédiate. Par dérivation, on trouve

$$\forall x \geqslant 0 \qquad f'(x) = -\frac{1}{(2+x)^2} \qquad \longrightarrow \qquad \operatorname*{Sup}_{x\geqslant 0} |f'(x)| \leqslant \frac{1}{4}$$

Ainsi, d'après l'inégalité des accroissements finis, la fonction f est k-contractante avec $k \in \,]\,0\,;1\,[$.
On a

$$\forall x \geqslant 0 \qquad f(x) = x \iff x^2 + 2x = 1 \iff (x+1-\sqrt{2})(x+1+\sqrt{2}) = 0 \iff x = \sqrt{2}-1$$

Par récurrence, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \left|u_n - (\sqrt{2}-1)\right| \leqslant k^n \left|u_0 - (\sqrt{2}-1)\right|$$

On conclut $\boxed{u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \sqrt{2}-1 \quad \text{et} \quad \sum \left(u_n - \sqrt{2}+1\right) \text{ converge absolument.}}$

Exercice 2 (***)

Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{\sqrt{n}}$.

Corrigé : Posons $\mathrm{S}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{k}\rfloor}}{\sqrt{k}}$ pour n entier. Pour p entier non nul, on pose $\mathrm{U}_p = \mathrm{S}_{p^2-1}$.
On a

$$\forall p \in \mathbb{N}^* \qquad \mathrm{U}_{p+1} - \mathrm{U}_p = \sum_{k=p^2}^{(p+1)^2-1} \frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{k}\rfloor}}{\sqrt{k}} = \sum_{k=p^2}^{(p+1)^2-1} \frac{(-1)^p}{\sqrt{k}} = (-1)^p \sum_{k=p^2}^{(p+1)^2-1} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

Par monotonie, on trouve

$$\forall p \in \mathbb{N}^* \qquad \sum_{k=p^2}^{(p+1)^2-1} \frac{1}{\sqrt{k}} \geqslant \sum_{k=p^2}^{(p+1)^2-1} \frac{1}{\sqrt{(p+1)^2}} = \frac{2p+1}{p+1} \xrightarrow[p\to+\infty]{} 2$$

Ainsi, la série téléscopique $\displaystyle\sum_{p\geqslant 1} [\mathrm{U}_{p+1} - \mathrm{U}_p]$ diverge grossièrement d'où la divergence de la suite $(\mathrm{U}_p)_{p\geqslant 1}$ c'est-à-dire de la suite $(\mathrm{S}_{p^2-1})_{p\geqslant 1}$ extraite de la suite des sommes partielles. On conclut

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{\sqrt{n}} \text{ diverge.}}$$

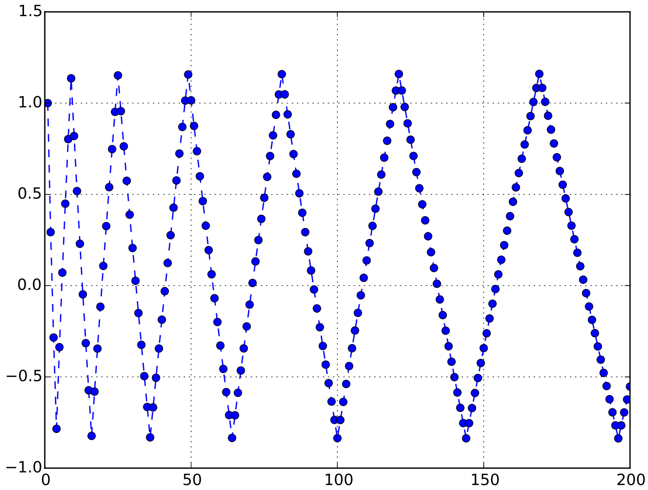

FIGURE 1 – Tracé de la suite $(\mathrm{S}_n)_{n\geqslant 1}$

Remarque : Soit p entier non nul. On a

$$v_p = |\mathrm{U}_{p+1} - \mathrm{U}_p| = \sum_{k=p^2}^{(p+1)^2-1} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

Par comparaison série/intégrale, on trouve

$$\int_{p^2}^{(p+1)^2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} \leqslant v_p \leqslant \int_{p^2-1}^{(p+1)^2-1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$$

d'où $$2 \leqslant v_p \leqslant 2\left(\sqrt{p^2+2p} - \sqrt{p^2-1}\right) = 2p\left(\sqrt{1+\frac{2}{p}} - \sqrt{1-\frac{1}{p^2}}\right)$$

Avec le développement usuel $\sqrt{1+u} = 1 + \dfrac{u}{2} - \dfrac{u^2}{8} + \mathrm{O}(u^3)$, on obtient

$$\sqrt{1+\frac{2}{p}} - \sqrt{1-\frac{1}{p^2}} \underset{p\to+\infty}{=} 1 + \frac{1}{p} - \frac{1}{2p^2} - \left(1 - \frac{1}{2p^2}\right) + \mathrm{O}\left(\frac{1}{p^3}\right) = \frac{1}{p} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{p^3}\right)$$

Et par conséquent $$v_p \underset{p\to+\infty}{=} 2 + \mathrm{O}\left(\frac{1}{p^2}\right)$$

Il s'ensuit $$\sum_{p=1}^{n} [\mathrm{U}_{p+1} - \mathrm{U}_p] = \sum_{p=1}^{n} (-1)^p v_p = 2\sum_{p=1}^{n} (-1)^p + \sum_{p=1}^{n} \mathrm{O}\left(\frac{1}{p^2}\right)$$

Ceci prouve que la suite $(\mathrm{U}_p)_{p\geqslant 1}$ est bornée. Enfin, les ensembles $(\llbracket p^2\,;\,(p+1)^2-1\rrbracket)_{p\geqslant 1}$ forment une partition de $\mathbb{N}^*$. Pour n entier non nul, il existe un unique p entier non nul tel que $n \in \llbracket p^2\,;\,(p+1)^2-1\rrbracket$. Ainsi

$$\mathrm{S}_n = \mathrm{U}_p + (-1)^p \sum_{k=p^2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

Cette écriture prouve la monotonie de S_n pour $n \in \llbracket p^2\,;\,(p+1)^2-1\rrbracket$ et donc S_n prend des valeurs entre U_p et U_{p+1}. On en déduit que la suite des sommes partielles $(\mathrm{S}_n)_{n\geqslant 1}$ est bornée.

Exercice 3 (****)

Soit $(a_n)_n$ une suite réelle non nulle. On pose $\mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} a_k^2$ pour n entier. On suppose

$$a_n \mathrm{S}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

Montrer
$$a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt[3]{3n}}$$

Corrigé : La suite $(\mathrm{S}_n)_n$ est croissante positive donc admet une limite $\ell \in \left]0\,;+\infty\right[\cup \{+\infty\}$. Supposons que cette limite soit finie. On aurait alors $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{1}{\ell}$ d'où la divergence grossière de la série $\sum a_n^2$ ce qui contredit l'hypothèse sur $(\mathrm{S}_n)_n$. On en déduit que $\mathrm{S}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ et $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Pour n entier non nul, on a

$$\mathrm{S}_n^3 - \mathrm{S}_{n-1}^3 = (\mathrm{S}_n - \mathrm{S}_{n-1})(\mathrm{S}_n^2 + \mathrm{S}_n\mathrm{S}_{n-1} + \mathrm{S}_{n-1}^2) = a_n^2(\mathrm{S}_n^2 + \mathrm{S}_n\mathrm{S}_{n-1} + \mathrm{S}_{n-1}^2)$$

On remarque
$$a_n\mathrm{S}_{n-1} = a_n(\mathrm{S}_n - a_n^2) = a_n\mathrm{S}_n + a_n^3 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

Il s'ensuit
$$\mathrm{S}_n^3 - \mathrm{S}_{n-1}^3 \xrightarrow[n\to\infty]{} 3$$

et d'après le lemme de Césaro

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[\mathrm{S}_k^3 - \mathrm{S}_{k-1}^3\right] = \frac{\mathrm{S}_n^3}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 3$$

On conclut
$$\boxed{a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt[3]{3n}}}$$

Remarque : Comment peut-on avoir l'idée de considérer $\mathrm{S}_n^3 - \mathrm{S}_{n-1}^3$ pour n entier non nul ? Comme $a_n\mathrm{S}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$, chercher un équivalent de a_n pour $n \to +\infty$ équivaut à chercher un équivalent de S_n pour $n \to +\infty$. On va donc chercher à isoler a_n ou S_n mais d'après la définition de S_n, il semble plus réaliste d'envisager d'isoler S_n. On remarque

$$a_n^2\mathrm{S}_n^2 = (\mathrm{S}_n - \mathrm{S}_{n-1})\mathrm{S}_n^2 = \mathrm{S}_n^3 - \mathrm{S}_{n-1}\mathrm{S}_n^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

Cette dernière expression est « proche » d'une forme téléscopique ce qui amène naturellement à considérer $\mathrm{S}_n^3 - \mathrm{S}_{n-1}^3$ qui permet d'isoler S_n^3 après télescopage et permet aussi d'espérer un comportement adapté au lemme de Césaro et c'est exactement ce qui a lieu.

Exercice 4 (****)

Soit $f \in \mathscr{C}^1(\left[0\,;+\infty\right[, \left]0\,;+\infty\right[)$ telle que

$$\frac{f'(x)}{f(x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$$

Montrer que la série $\sum f(n)$ converge et donner un équivalent du reste d'ordre n lorsque $n \to +\infty$.

Corrigé : Il existe $a \geqslant 0$ tel que $\dfrac{f'(x)}{f(x)} \leqslant -1$ pour $x \geqslant a$. Ainsi, pour $x \geqslant a$, on a

$$\int_a^x \frac{f'(t)}{f(t)}\,\mathrm{d}t = \ln\left(\frac{f(x)}{f(a)}\right) \leqslant -(x-a)$$

d'où $\qquad \forall n \geqslant a \qquad 0 \leqslant f(n) \leqslant f(a)\mathrm{e}^{-n+a} = \mathrm{O}(\mathrm{e}^{-n})$

et par comparaison à une série géométrique convergente, on conclut

$$\boxed{\text{La série } \sum f(n) \text{ converge.}}$$

Soit $c > 0$. Il existe $\mathrm{A} \geqslant 0$ tel que $\dfrac{f'(x)}{f(x)} \leqslant -c$ pour $x \geqslant \mathrm{A}$. Ainsi, avec $\mathrm{N} = \lfloor \mathrm{A} \rfloor$, il vient

$$\forall n \geqslant \mathrm{N} \qquad \forall k \geqslant 0 \qquad \int_{n+1}^{n+k+1} \frac{f'(t)}{f(t)}\,\mathrm{d}t = \ln\left(\frac{f(n+k+1)}{f(n+1)}\right) \leqslant -ck$$

ce qui équivaut à $\qquad \forall n \geqslant \mathrm{N} \qquad f(n+k+1) \leqslant f(n+1)\mathrm{e}^{-ck}$

Par suite $\;\forall n \geqslant \mathrm{N} \qquad \mathrm{R}_{n+1} = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} f(n+k+1) \leqslant f(n+1) \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ck} = f(n+1)\dfrac{\mathrm{e}^{-c}}{1-\mathrm{e}^{-c}}$

Comme $\mathrm{e}^{-c} \xrightarrow[c\to+\infty]{} 0$, il s'ensuit

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad n \geqslant \mathrm{N} \implies 0 \leqslant \mathrm{R}_{n+1} \leqslant \varepsilon f(n+1)$$

ce qui signifie $\qquad \mathrm{R}_{n+1} = \mathrm{o}(f(n+1))$

Or, on a $\qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{R}_n = f(n+1) + \mathrm{R}_{n+1}$

On conclut $\qquad \boxed{\mathrm{R}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} f(n)}$

Exercice 5 (****)

Nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{\sin(\sqrt{n})}{\sqrt{n}}$.

Corrigé : L'idée est de considérer des suites extraites de sorte que les valeurs de $\sin\sqrt{n}$ soient concentrées au dessus de $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \alpha_n = \left\lfloor \left(2n\pi + \frac{\pi}{4}\right)^2 \right\rfloor \quad \text{et} \quad \beta_n = \left\lfloor \left(2n\pi + \frac{3\pi}{4}\right)^2 \right\rfloor$$

Ainsi, pour n entier, on a en particulier

$$\sqrt{\alpha_n + 1} > 2n\pi + \frac{\pi}{4} \quad \text{et} \quad \sqrt{\beta_n} \leqslant 2n\pi + \frac{3\pi}{4}$$

et $\qquad \beta_n - \alpha_n \geqslant \left(2n\pi + \dfrac{3\pi}{4}\right)^2 - 1 - \left(2n\pi + \dfrac{\pi}{4}\right)^2 \geqslant 2n\pi^2 + \mathrm{o}(n)$

Par suite, on obtient pour n entier

$$\sum_{k=\alpha_n+1}^{\beta_n} \frac{\sin(\sqrt{k})}{\sqrt{k}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=\alpha_n+1}^{\beta_n} \frac{1}{\sqrt{\beta_n}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{2n\pi^2 + \mathrm{o}(n)}{2n\pi + \mathrm{o}(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

Notant $\mathrm{S}_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\sin(\sqrt{k})}{\sqrt{k}}$, si la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{\sin(\sqrt{n})}{\sqrt{n}}$ convergeait, on aurait $\mathrm{S}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{S}$ avec S réel et par conséquent

$$\sum_{k=\alpha_n+1}^{\beta_n} \frac{\sin(\sqrt{k})}{\sqrt{k}} = \mathrm{S}_{\beta_n} - \mathrm{S}_{\alpha_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

ce qui n'a pas lieu. On conclut

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin(\sqrt{n})}{\sqrt{n}} \text{ diverge.}}$$

Remarque : La fonction $\sqrt{\ }$ croît lentement. Ainsi, on peut trouver suffisamment de points répartis entre $2n\pi+\dfrac{\pi}{4}$ et $2n\pi+\dfrac{3\pi}{4}$, c'est-à-dire suffisamment de points dont le sinus est « grand » pour que leur somme contredise la convergence.

Exercice 6 (****)

Déterminer la nature de la série de terme général $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$.

Corrigé : La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est alternée et vérifie le critère des séries alternée puisque la suite $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\geqslant 1}$ décroît et tend vers zéro. Son reste R_n d'ordre n est donc bien défini. On sait aussi que R_n est du signe de $\dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}$ donc la série $\sum \mathrm{R}_n$ est alternée et on a $|\mathrm{R}_n| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{u_{n+1}}}$ d'où $\mathrm{R}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Il reste à établir la décroissance de la suite $(|\mathrm{R}_n|)_n$ pour invoquer le théorème des séries alternées. Un changement d'indice donne

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{R}_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+n+1}}{\sqrt{k+n+1}} = (-1)^{n+1} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+n+1}}$$

d'où
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad |\mathrm{R}_n| = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+n+1}}$$

Ainsi, pour n entier, par linéarité du symbole somme en cas de convergence

$$|\mathrm{R}_{n+1}| - |\mathrm{R}_n| = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \left[\frac{1}{\sqrt{k+n+2}} - \frac{1}{\sqrt{k+n+1}}\right]$$

Soit n entier. D'après le théorème des accroissements finis appliqué à $u \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{n+1+u}}$ sur $]\,k\,;k+1\,[$, il existe $\alpha_{n,k} \in \,]\,k\,;k+1\,[$ tel que

$$\frac{1}{\sqrt{k+n+2}} - \frac{1}{\sqrt{k+n+1}} = -\frac{1}{2\,(n+1+\alpha_{n,k})^{\frac{3}{2}}}$$

On pose $\qquad \forall (n,k) \in \mathbb{N}^2 \qquad \varepsilon_{n,k} = \dfrac{1}{\sqrt{k+n+1}} - \dfrac{1}{\sqrt{k+n+2}} = \dfrac{1}{2\,(n+1+\alpha_{n,k})^{\frac{3}{2}}}$

Clairement
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \varepsilon_{n,k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$$

Pour n et k entiers, comme $\alpha_{n,k} < k+1 < \alpha_{n,k+1}$, on en déduit que la suite $(\varepsilon_{n,k})_k$ décroît et par conséquent, la série définissant

$$|\mathrm{R}_n| - |\mathrm{R}_{n+1}| = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \varepsilon_{n,k}$$

vérifie elle aussi le théorème des séries alternées. Le signe de sa somme est donc celui de son premier terme à savoir positif ce qui prouve

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad |\mathrm{R}_n| \geqslant |\mathrm{R}_{n+1}|$$

On conclut $$\boxed{\text{La série } \sum \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \text{ converge.}}$$