ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Feuille d'exercices n°09

Exercice 1 (***)

Soit $(u_n)_n$ la suite définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2+u_n}$ pour n entier.
Montrer $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$ avec ℓ un réel à préciser puis déterminer la nature de la série $\sum (u_n - \ell)$.

Indications : Considérer $f : x \in [\,0\,;+\infty\,[\mapsto \dfrac{1}{2+x}$ et montrer qu'elle est k-lipschitzienne avec $k < 1$. En déduire une majoration explicite de $|u_n - \ell|$ pour n entier avec ℓ à déterminer.

Exercice 2 (***)

Déterminer la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}}{\sqrt{n}}$.

Indications : Pour p entier non nul, poser $\mathrm{U}_p = \mathrm{S}_{p^2-1}$ et considérer $\sum\limits_{p\geqslant 1} [\mathrm{U}_{p+1} - \mathrm{U}_p]$.

Exercice 3 (****)

Soit $(a_n)_n$ une suite réelle non nulle. On pose $\mathrm{S}_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2$ pour n entier. On suppose

$$a_n \mathrm{S}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

Montrer

$$a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt[3]{3n}}$$

Indications : Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{S}_n$ puis considérer $\mathrm{S}_n^3 - \mathrm{S}_{n-1}^3$ pour n entier non nul et utiliser une sommation de relation de comparaison.

Exercice 4 (****)

Soit $f \in \mathscr{C}^1([\,0\,;+\infty\,[\,,\,]\,0\,;+\infty\,[)$ telle que

$$\frac{f'(x)}{f(x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$$

Montrer que la série $\sum f(n)$ converge et donner un équivalent du reste d'ordre n lorsque $n \to +\infty$.

Indications : Montrer que $\dfrac{f'(x)}{f(x)} \leqslant -1$ pour x suffisamment grand puis intégrer l'inégalité. Pour le reste d'ordre n, s'inspirer de la démarche précédente en justifiant que pour $c > 0$, on a $\dfrac{f'(x)}{f(x)} \leqslant -c$ pour x suffisamment grand et en intégrant sur $[\![\, n+1\,;\, n+k+1 \,]\!]$ avec n assez grand.

Exercice 5 (****)

Nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{\sin(\sqrt{n})}{\sqrt{n}}$.

Indications : Poser

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \alpha_n = \left\lfloor \left(2n\pi + \frac{\pi}{4}\right)^2 \right\rfloor \quad \text{et} \quad \beta_n = \left\lfloor \left(2n\pi + \frac{3\pi}{4}\right)^2 \right\rfloor$$

puis considérer

$$\sum_{k=\alpha_n+1}^{\beta_n} \frac{\sin\sqrt{k}}{\sqrt{k}}$$

Exercice 6 (****)

Déterminer la nature de la série de terme général $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$.

Indications : Pour n entier, on note $\mathrm{R}_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$, bien défini comme reste d'une série alternée qui vérifie le critère des séries alternées. Établir pour n entier

$$|\mathrm{R}_{n+1}| - |\mathrm{R}_n| = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \left[\frac{1}{\sqrt{k+n+2}} - \frac{1}{\sqrt{k+n+1}}\right]$$

puis utiliser le théorème des accroissements finis sur $u \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{n+1+u}}$.