



# ÉVALUATIONS DES PERFORMANCES DES S.L.C.I : STABILITÉ

Cours

v1.1

*Instituion Sainte Marie – 2 Rue de l'Abbaye - 92160 Antony*

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Caractérisation des systèmes asservis</b>	<b>2</b>
1.1	Structure des systèmes asservis . . . . .	2
1.2	Caractéristiques attendues d'un système asservi . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Définition</b>	<b>3</b>
2.1	Position du problème . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Équivalence stabilité - étude de la fonction de transfert</b>	<b>5</b>
<b>4</b>	<b>Étude des pôles</b>	<b>6</b>
4.1	Bilan concernant la stabilité en fonction des pôles de la fonction de transfert . . . . .	11
4.2	Condition nécessaire et (parfois) suffisante de stabilité . . . . .	13
4.3	Influence de la partie réelle . . . . .	15
4.4	Influence de la partie imaginaire . . . . .	15
4.5	Réduction de l'ordre d'un système par étude du pôle dominant . . . . .	16
<b>5</b>	<b>Équivalence stabilité - étude de la FTBO</b>	<b>16</b>
5.1	FTBO et FTBF . . . . .	17
5.2	Détermination graphique des marges de gain et de phase . . . . .	18
<b>6</b>	<b>Lien entre marges de stabilités et dépassement</b>	<b>23</b>

## Introduction

L'approche pédagogique et didactique des enseignements en PCSI-PSI s'organise autour de systèmes pluritechnologiques. Chaque système est défini à partir de besoins fonctionnels et d'exigences, de modèles numériques et d'un système matériel. Un système sera étudié dans sa globalité à partir de ces trois approches imbriquées :

1. la réalité du besoin ou exigences fonctionnelles. Elle se décline dans le cahier des charges défini avec un client ;
2. la réalité virtuelle d'un système. Elle se traduit dans l'élaboration d'un modèle permettant de simuler son comportement afin d'en prévoir et d'en évaluer les performances ;
3. la réalité matérielle d'un système. Les performances du système matériel sont mesurées par expérimentation.

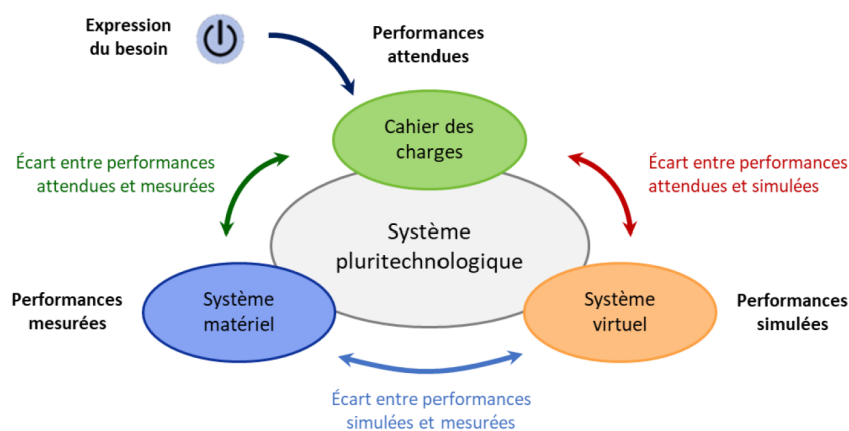


FIGURE 1 – Extrait du programme officiel des Sciences industrielles de l'ingénieur PCSI-PSI

Le point 1 est vu avec le client. Il correspond à ce qui est écrit dans le diagramme des exigences.

Dans les points 2 et 3, un mot revient et cela va être le cœur d'une grosse partie du programme de cette année, à commencer par ce chapitre : **les performances**.

## 1 Caractérisation des systèmes asservis

### 1.1 Structure des systèmes asservis

Un système asservi linéaire peut se représenter par le graphique ci-dessous. On y retrouve une chaîne d'action ou chaîne directe qui agit sur le système pour obtenir la grandeur asservie, la sortie souhaitée en fonction de la consigne. On y trouve également une chaîne d'information ou chaîne de mesure qui prélève une image de la sortie, cette image est comparée à la consigne à atteindre.

La sortie de ce comparateur est nommée *écart* et est souvent notée  $\epsilon$ .

### 1.2 Caractéristiques attendues d'un système asservi

Il y a 3 critères de performances à vérifier et à obtenir pour l'utilisation d'un SLCI. Ils sont donnés ci-après par ordre décroissant d'importance

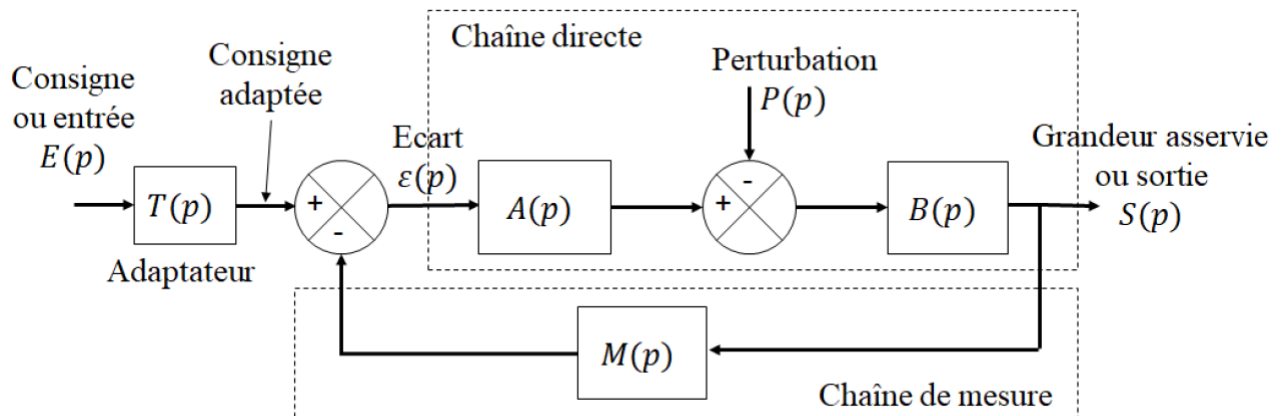


FIGURE 2 – Schéma fonctionnel d'un système asservi



### Définition Critères de performance

Le comportement d'un système asservi est évalué suivant différents critères de performance :

- *Stabilité* : la réponse du système converge-t-elle pour une entrée constante ? Certains systèmes peuvent être instables, dans ce cas, leurs réponses divergent ou oscillent sans jamais se stabiliser ;
- *Précision* : le système asservi atteint-il la valeur de consigne en l'absence de perturbation(s) ? le système asservi atteint-il la valeur de consigne en présence de perturbation(s) ?
- *Rapidité* : combien de temps faut-il au système pour se stabiliser ?



### Remarque

1. Un système peut être sensible aux perturbations extérieures (ex : l'ouverture de la porte d'un four, la présence d'une pente sur une route etc...).
2. Le réglage et l'optimisation du comportement d'un système est souvent **un compromis** entre stabilité (oscillations) précision, et rapidité.

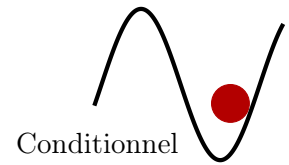
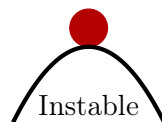
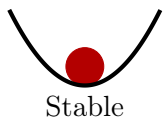
## 2 Définition

Avant de parler de notion de rapidité, ou de précision qui demande de parler de valeur finale atteinte par le système, il est nécessaire de parler de stabilité. En effet, ces deux notions n'ont pas de sens si le système n'est pas stable.

### 2.1 Position du problème

Une manière intuitive de préciser la notion de stabilité est d'imaginer un système que l'on écarte de sa position initiale par une impulsion puis de regarder son évolution ; s'il retrouve sa position initiale, il est stable, s'il s'en écarte, il est instable.

La figure ?? illustre la notion de stabilité d'un système.



La définition officiellement au programme est la suivante :



### Définition Stabilité 1

Un système est stable si à une entrée bornée correspond une sortie bornée. On parle d'EBSB (entrée bornée, sortie bornée).

Nous reviendrons sur cette définition et ses limites dans les séances de TP.

Une définition plus générale de la stabilité (qui dans une majorité de cas est équivalente) s'écrit ainsi :



### Définition Stabilité 2

Un système est dit stable si la réponse libre du système tend vers 0 à l'infini.



### Remarque

La réponse libre du système correspond à la solution homogène de l'équation différentielle. C'est à dire, si l'on écarte un peu de sa position le système, il doit revenir à cette position.

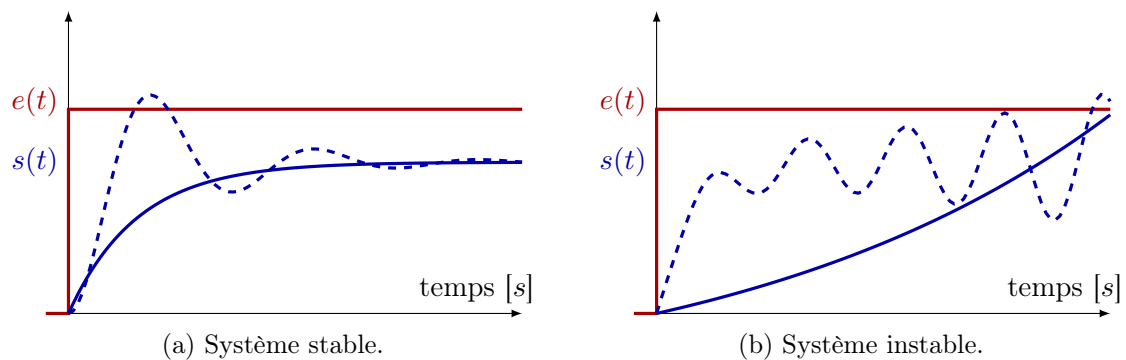


FIGURE 3 – Exemples de réponse.

Dans la réalité un système réel, pluritechnologiques présente généralement des oscillations bornées. Cela peut être du par des contraintes mécaniques (butées) ou électrique (saturation en courant). Ces bornes de fonctionnement couplées à un système instable peuvent entraîner la destruction du système.

La stabilité d'un système est le premier critère à vérifier pour un système réel.

### 3 Équivalence stabilité - étude de la fonction de transfert

Tout système linéaire (sans retard) peut se mettre sous la forme du schéma bloc suivant.

$$\xrightarrow{E(p)} \boxed{G(p) = \frac{K \cdot N(p)}{p^\alpha \cdot D(p)}} \xrightarrow{S(p)}$$

- $K$  le gain  $K > 0$  ;
- $N(p)$  et  $D(p)$  deux polynômes tel que :
  - ◊  $N(0) = 1$  et  $D(0) = 1$
  - ◊  $N(p)$  de degré  $m$ ,  $N(p) = 1 + a_1 \cdot p + a_2 \cdot p^2 + \dots + a_m \cdot p^m$
  - ◊  $D(p)$  de degré  $n$ ,  $D(p) = 1 + b_1 \cdot p + b_2 \cdot p^2 + \dots + b_n \cdot p^n$
- $\alpha$  la classe du système

Pour un système physique, en vertu du principe de causalité (l'effet ne peut précéder la cause), le degré du dénominateur est supérieur au degré du numérateur.

Or, la stabilité d'un système est assurée si la réponse de celui-ci à une stimulation impulsionnelle ne tend pas vers l'infini (d'après la définition 2).

La réponse impulsionnelle d'un système est l'évolution de sa sortie suite à une entrée idéalement représentée par une impulsion de Dirac  $\delta(t)$ . Par ailleurs, cette réponse permet de caractériser la stabilité du système : un système est stable, si, soumis à une impulsion de Dirac, il revient vers son état initial.

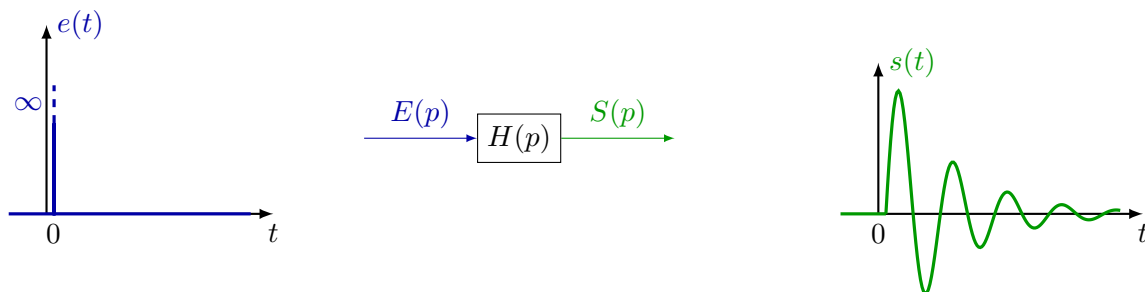


FIGURE 4 – Comportement stable en réponse impulsionnelle.

Abandonner un système avec une condition initiale non nulle revient pour l'étude du comportement à considérer que le système a été soumis à l'instant  $t = 0$  à une impulsion  $e(t) = A_0 \cdot \delta(t)$  avec  $\delta(t)$  l'impulsion de Dirac, si celui-ci revient dans sa position initiale, on considère alors que le système est stable. On rappelle que la transformée de Laplace de l'impulsion de Dirac est :

$$\mathcal{L}(\delta(t)) = 1 \quad \text{d'où} \quad \mathcal{L}(e(t)) = A_0$$

Nous avons  $G(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$  d'où  $S(p) = G(p) \cdot E(p)$  finalement en prenant un Dirac unitaire  $S(p) = G(p)$ .

**Remarque**

$$S(p) = G(p) \times E(p) = G(p)$$

Ainsi la fonction de transfert du système n'est autre que l'image par la transformation de Laplace de sa réponse impulsionnelle. Celle-ci porte donc en elle toute l'information sur le système. C'est pourquoi elle est aussi appelée *mode* ou *signature* du système.

La réponse temporelle  $s(t)$  se déduit de la transformée inverse de  $S(p)$  :

$$s(t) = \mathcal{L}^{-1}(S(p)) = A_0 \cdot \mathcal{L}^{-1}(G(p)).$$

Étudier la réponse temporelle d'un système linéaire soumis à une impulsion de Dirac revient donc à étudier la transformée inverse de la fonction de transfert du système :

$$\mathcal{L}^{-1}(G(p)) = g(t) \cdot \mathcal{H}(t)$$

avec  $\mathcal{H}(t)$  la fonction de Heaviside telle que  $\begin{cases} t < 0 & \mathcal{H}(t) = 0 \\ t \geq 0 & \mathcal{H}(t) = 1 \end{cases}$ .

**Propriété**

- Étudier la stabilité d'un SLCI revient à étudier la réponse de celui-ci à une impulsion. Ce qui revient à étudier sa fonction de transfert.
- On veut une fonction de transfert qui tend vers 0 quand  $t$  tend vers l'infini.

Il reste donc à déterminer la transformée inverse de  $G(p)$ , pour cela nous allons décomposer la fonction de transfert en éléments simples et rechercher les racines du dénominateur (les pôles).

$$G(p) = \frac{K \cdot N(p)}{p^\alpha \cdot D(p)} = \frac{K \cdot (1 + a_1 \cdot p + a_2 \cdot p^2 + \dots + a_m \cdot p^m)}{p^\alpha \cdot (1 + b_1 \cdot p + b_2 \cdot p^2 + \dots + b_n \cdot p^n)}$$

Ainsi, étudier la stabilité d'un système revient à étudier les *pôles* de sa fonction de transfert.

**Rappel**

Les pôles de la fonction de transfert sont les zéros du dénominateur  $D(p)$ .

## 4 Étude des pôles

Tout polynôme possède des racines. Nous cherchons donc les racines de  $D(p)$ . Ces racines peuvent être :

- des racines nulles
- des racines réelles, simples et/ou multiples

- des racines complexes, simple et/ou multiples

Le polynôme du dénominateur peut donc se mettre sous la forme d'un produit de fonctions du premier et du second ordre (*cf. votre cours de maths*).

$$G(p) = K' \cdot \frac{1}{p^\alpha} \cdot \frac{1 + a_1 \cdot p + a_2 \cdot p^2 + \dots + a_m \cdot p^m}{\prod_j (p - c_j)^{\alpha_j} \cdot \prod_l \left( (p - a_l)^2 + b_l^2 \right)^{\alpha_l} \cdot \prod_k (p^2 + b_k^2)^{\alpha_k}}$$

On suppose pour simplifier l'étude qui suit que toutes les racines sont simples, le cas des racines multiples sera examiné plus loin.

Si les racines sont simples ( $\alpha = \alpha_j = \alpha_k = \alpha_l = 1$ ) alors

$$G(p) = K' \cdot \frac{1}{p} \cdot \frac{1 + a_1 \cdot p + a_2 \cdot p^2 + \dots + a_m \cdot p^m}{\prod_j (p - c_j) \cdot \prod_l \left( (p - a_l)^2 + b_l^2 \right) \cdot \prod_k (p^2 + b_k^2)}$$

et la décomposition en fractions simples s'écrit :

$$G(p) = \sum_f \frac{C_f}{p} + \sum_j \frac{C_j}{p - c_j} + \sum_l \frac{A_l \cdot p + B_l}{(p - a_l)^2 + b_l^2} + \sum_k \frac{A_k \cdot p + B_k}{p^2 + b_k^2}$$

on reconnaît :

$$\sum_f \frac{C_f}{p} : \quad \text{décomposition en fraction simple des racines nulles}$$

$$\sum_j \frac{C_j}{p - c_j} : \quad \text{décomposition en fraction simple des racines réelles}$$

$$\sum_l \frac{A_l \cdot p + B_l}{(p - a_l)^2 + b_l^2} : \quad \text{décomposition en fraction simple des racines complexes conjuguées}$$

$$\sum_k \frac{A_k \cdot p + B_k}{p^2 + b_k^2} : \quad \text{décomposition en fraction simple des racines imaginaires pures.}$$

Sa réponse impulsionnelle est donc la solution de l'équation sans second membre qui est la superposition des contributions de chacun des pôles à cette solution. La réponse temporelle est donc la somme des réponses temporelles. Le système sera instable si un des termes ne tend pas vers 0 en l'infini, il nous suffit donc d'étudier chacune des transformées inverses pour obtenir les conditions de stabilité du système.

## Pôles réels

$$\sum_j \frac{C_j}{p - c_j}$$

À partir du tableau des transformées inverses en annexe on obtient :

$$\frac{C_j}{p - c_j} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} C_j \cdot e^{c_j \cdot t}$$

Le système est stable si la réponse temporelle tend vers 0 lorsque  $t$  tend vers l'infini. L'allure de la réponse temporelle ne dépend donc que du signe de  $c_j$ .

### Pôle réel positif

$c_j > 0$ , alors  $\lim_{t \rightarrow \infty} (e^{c_j \cdot t}) = +\infty$ , la sortie diverge, le système est instable.

La contribution d'un pôle réel positif, par le terme  $e^{c_j t}$ , est divergente et entraîne le caractère instable du système. Si ce pôle est multiple, le polynôme accentue cet effet.

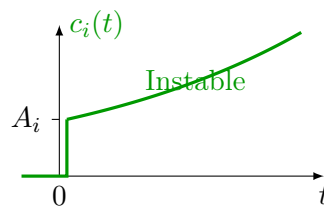


FIGURE 5 – Contribution d'un pôle réel positif -  $A_i e^{c_j t}$  avec  $c_j > 0$ .

### Pôle réel négatif

$c_j < 0$ , alors  $\lim_{t \rightarrow \infty} (e^{c_j \cdot t}) = +0$ , la sortie tend vers 0, cette racine ne rend pas le système instable.

Les *pôles réels négatifs* apportent, par les termes  $e^{c_j t}$ , un comportement convergent vers zéro, quelle que soit leur multiplicité, compte tenu des propriétés de convergence de l'exponentielle face aux polynômes.

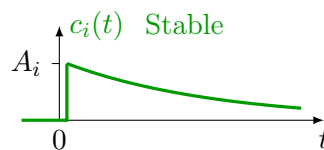


FIGURE 6 – Contribution d'un pôle réel négatif -  $A_i e^{c_j t}$  avec  $c_j < 0$ .



#### Remarque

Dans le cas de racines multiples on a :

$$\sum_j \frac{C_j}{(p - c_j)^n}$$

La transformée inverse donne :



$$\frac{C_j}{(p - c_j)^n} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} C_j \cdot t^{n-1} \cdot e^{c_j \cdot t}$$

Ainsi la multiplicité de la racine réelle ne joue pas sur la convergence.

## Pôles complexes

$$\sum_l \frac{A_l \cdot p + B_l}{(p - a_l)^2 + b_l^2}$$

Le tableau des transformées inverses ne donne pas directement la transformée de  $\frac{A_l \cdot p + B_l}{(p - a_l)^2 + b_l^2}$  mais il est possible de la déduire à partir des deux formes suivantes :

$$\frac{b}{b^2 + (p + a)^2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} e^{-a \cdot t} \cdot \sin b \cdot t \text{ et}$$

$$\frac{p + a}{b^2 + (p + a)^2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} e^{-a \cdot t} \cdot \cos bt.$$

La transformée inverse est donc de la forme :

$$\frac{A_l \cdot p + B_l}{(p - a_l)^2 + b_l^2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} K_l \cdot e^{a_l \cdot t} \cdot \sin(b_l \cdot t + \varphi_l)$$

Le sinus est toujours borné, la stabilité du système ne dépend donc que du signe de  $a_l$ .

## Pôles complexes à partie réelle positive

$a_l > 0$ , comme précédemment  $\lim_{t \rightarrow \infty} (e^{a_l \cdot t}) = +\infty$ , la sortie diverge, le système est instable. La contribution d'un couple de pôles complexes à partie réelle positive, par le terme  $e^{a_l t}$ , est divergente et entraîne le caractère instable du système. Si ces pôles sont multiples, le polynôme accentue cet effet.

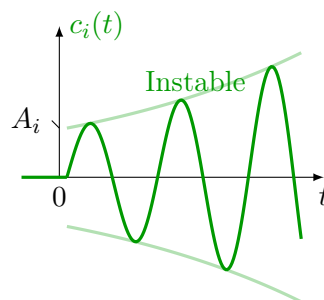


FIGURE 7 – Contribution d'un pôle réel positif -  $K_l e^{a_l t} \sin(b_l t + \varphi_l)$  avec  $a_l > 0$ .

## Pôles complexes à partie réelle négative

$a_l < 0$ , dans ce cas,  $\lim_{t \rightarrow \infty} (e^{a_l \cdot t}) = 0$ , la sortie tend vers 0, cette racine ne rend pas le système instable.

Les couples de *pôles complexes à partie réelle négative* apportent, par les termes  $e^{a_l t}$ , un comportement convergent vers zéro, quelle que soit leur multiplicité, compte tenu des propriétés de convergence de l'exponentielle face aux polynômes.

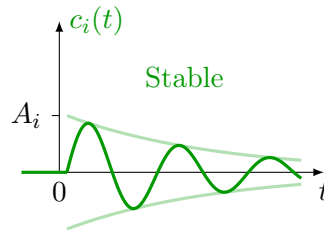


FIGURE 8 – Contribution d'un pôle complexe à partie réelle négative -  $K_l e^{a_l t} \sin(b_l t + \varphi_l)$  avec  $a_l < 0$ .

### Pôles nuls ou imaginaires purs

Il ne reste plus qu'à étudier le cas d'une racine nulle, et le cas d'une racine imaginaire pure mais nous allons ici prendre en compte le fait que la racine soit simple ou multiple.

#### Pôle nul

**Racine nulle simple**  $\frac{1}{p}$  : 0 est racine du dénominateur. La transformée inverse est :

$$\frac{1}{p} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} 1 \cdot \mathcal{H}(t)$$

La sortie tend donc vers une constante non nulle. Le système ne revient pas à 0 mais ne s'écarte pas indéfiniment, il reste borné. On dit alors que le système est **juste instable**.

La contribution d'un pôle nul, par le terme  $e^{p_i t}$  alors égal à 1, est une constante non nulle qui empêche la convergence vers zéro de la réponse. Si ce pôle est multiple, le polynôme fait diverger la réponse.

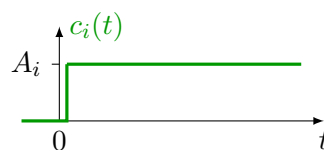


FIGURE 9 – Contribution d'un pôle nul -  $A_j$ .



#### Remarque

Si on prend la première définition, c'est-à-dire que l'on soumet le système à une entrée en échelon, la sortie diverge, la sortie tend vers une droite (intégration d'une constante).

**Racine nulle double**  $\frac{1}{p^2}$  : du tableau des transformées, on déduit

$$\frac{1}{p^2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} t$$

On constate que la sortie diverge lorsque  $t$  croît. Le système est donc instable.

### Pôle imaginaire pur

La contribution d'un couple de pôles imaginaires purs, par le terme  $e^{a_k t} = 1$ , est une réponse oscillatoire qui empêche la convergence de la réponse. Si ces pôles sont multiples, le polynôme fait diverger la réponse.

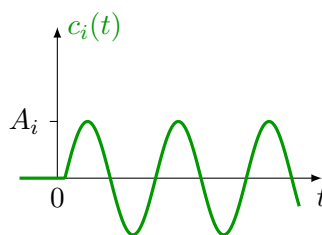


FIGURE 10 – Contribution d'un pôle imaginaire pur -  $A_i \cos(\omega_i t + \varphi_i)$ .

**Racine imaginaire pure simple**  $\frac{A_k}{p^2 + \omega_k^2}$ , on a alors  $p_k = \pm j \cdot \omega_k$  qui est racine du dénominateur.

Du tableau des transformées on déduit :

$$\frac{1}{p^2 + \omega^2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{1}{\omega} \sin \omega \cdot t$$

La sortie est constamment sinusoïdale, elle ne tend pas vers 0 mais elle reste bornée. On dit alors que le système est **juste instable**.

**Racine imaginaire pure double**  $\frac{A_k}{(p^2 + \omega_k^2)^2}$  le tableau donne

$$\frac{1}{(p^2 + \omega^2)^2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{1}{2 \cdot \omega^2} (\sin \omega \cdot t - \omega \cdot t \cdot \cos \omega \cdot t).$$

Le second terme tend vers l'infini, le système est donc instable.

## 4.1 Bilan concernant la stabilité en fonction des pôles de la fonction de transfert



### À retenir

- Si les parties réelles des racines complexes sont toutes négatives et si toutes les racines réelles sont négatives, alors la réponse transitoire du système est composée d'exponentielles amorties et décroissantes, la réponse tend vers zéro pour  $t$  tendant vers l'infini, le système revient à sa position d'équilibre, le système est **stable**.

- Si un des pôles réels est positif, le système est instable. Le système est de type divergent exponentiel.
- Si un des pôles complexes est à partie réelle positive, le système est **instable**. Le système est de type oscillatoire divergent.
- Si 0 ou  $\pm j\omega$  est racine simple, le système est **juste instable**.
- Si 0 ou  $\pm j\omega$  est racine multiple, le système est **instable**.

— Pouvant considérer les pôles réels comme des pôles complexes particuliers, il vient alors l'important résultat :



### Propriété

**Stabilité et pôles de la FTBF** : un système est *stable* si et seulement si tous les pôles de sa fonction de transfert sont à *partie réelle strictement négative*.

### Exemple:

Soient deux fonctions de transfert en boucle fermée  $H_{BF} = \frac{5(p-3)}{(p+1)(p+2)}$  et  $H_{BF} = \frac{2}{(p-1)^2(p^2+p+1)}$ . Dites pour chacune si le système est stable ou non ?

## Lieu des pôles dans le plan complexe (diagramme de Nyquist)

En étudiant l'influence de la position des pôles dans le plan complexe (*c.f.* FIGURE 11), on comprend que pour une entrée impulsionnelle, il suffit qu'il y ait un seul pôle à partie réelle positive ou nulle pour que la sortie ne revienne pas à zéro, diverge et que le système soit qualifié d'instable.

Pour un système stable, on peut remarquer que l'effet des pôles très éloignés de l'axe imaginaire disparaît bien avant celui des pôles qui en sont plus proches, compte tenu des décroissances exponentielles très différentes. Aussi, les pôles du systèmes les plus proches de l'axe imaginaire sont qualifiés de *pôles dominants*.

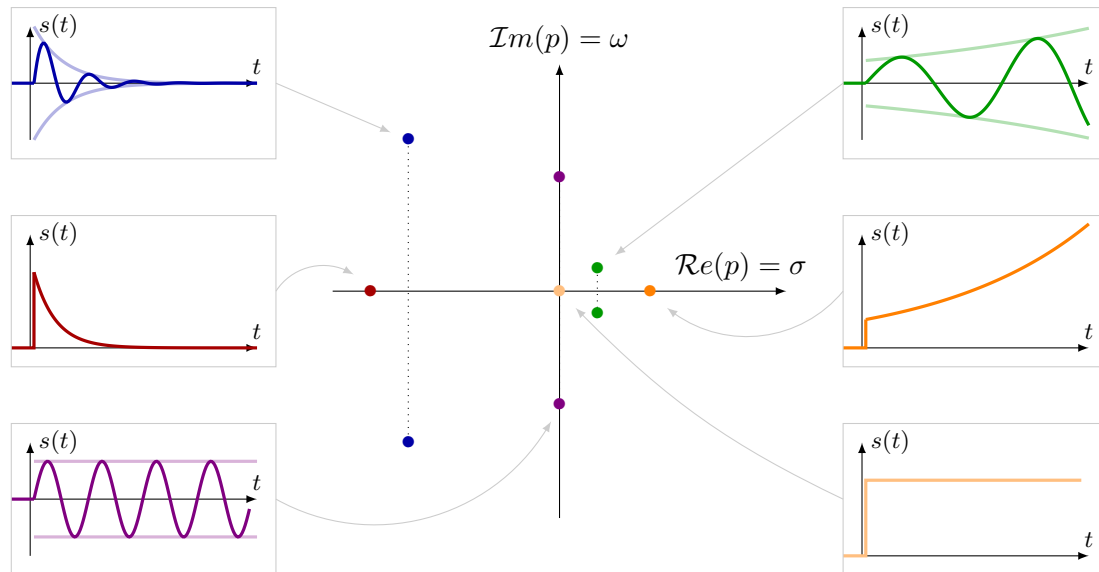


FIGURE 11 – Influence de la position des pôles dans le plan complexe à une entrée impulsionnelle.

## 4.2 Condition nécessaire et (parfois) suffisante de stabilité

Tout l'enjeu de ce qui précède est de montrer le lien entre stabilité d'un système, et signe des pôles de sa fonction de transfert. Il suffit donc d'étudier les racines du dénominateur de la fonction de transfert en boucle fermée pour savoir si le système est stable ou instable.

Même si votre niveau en maths est très avancé... Résoudre des polynômes de degré 1, 2, 3 voire 4, "facile!" (ou pas..).

Néanmoins il existe des outils qui, à défaut de nous donner les racines, nous indiquent le signe de celles-ci.

**Équation caractéristique** La connaissance des racines permet de déduire si le système est stable, mais il n'est pas possible de déterminer analytiquement les racines d'un polynôme de degré élevé. Cependant il existe un critère, maintenant **Hors-Programme** que l'on appelle le *Critère de Routh* basé sur un pan des mathématiques : *les polynômes de Hurwitz*.

**Remarque**

"Un polynôme de Hurwitz, ainsi nommé en l'honneur du mathématicien allemand Adolf Hurwitz, est un polynôme d'une variable à coefficients réels dont les racines sont toutes à partie réelle strictement négative. Ce tableau est une construction numérique basée sur les coefficients  $b_i$  du polynôme dont les éléments permettent de vérifier un critère donnant une condition nécessaire et suffisante pour que le polynôme soit de Hurwitz."

Ce critère maintenant désuet n'est plus à connaître. Néanmoins son application aux ordres 1 et 2 est pertinente...

Pour une fonction de transfert en boucle fermée s'écrivant,

$$BF(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{a_m \cdot p^m + a_{m-1} \cdot p^{m-1} + \dots + a_1 \cdot p^1 + a_0}{b_n \cdot p^n + b_{n-1} \cdot p^{n-1} + \dots + b_1 \cdot p^1 + b_0}$$

on appelle équation caractéristique, l'équation  $D(p) = 0$ , soit :

$$b_n \cdot p^n + b_{n-1} \cdot p^{n-1} + \dots + b_1 \cdot p^1 + b_0 = 0.$$

**Propriété****Condition nécessaire de stabilité**

Pour que le système soit stable, il faut que tous les coefficients de l'équation caractéristique soient du même signe que  $b_n$ .

**Application aux systèmes du 1<sup>er</sup> et du 2<sup>nd</sup> ordre**

**Premier ordre :** Soit le système du premier ordre représenté par la fonction de transfert suivante :

$$H_1(p) = \frac{K}{1 + \tau \cdot p}$$

**Second ordre :** Soit le système du premier ordre représenté par la fonction de transfert suivante :

$$H_2(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} \cdot p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

Cf. le cours de premier année.

$\xi > 1$  : Soit

$$H_2(p) = \frac{K}{(1 + \tau_1 \cdot p) \cdot (1 + \tau_2 \cdot p)}$$

$\xi = 1$  :

$$H_2(p) = \frac{K}{(1 + \tau \cdot p)^2}$$

$$0 < \xi < 1 :$$

$$G(p) = \frac{K}{(p - r_1) \cdot (p - r_2)}$$

avec  $r_1 = a + i \cdot b$  et  $r_2 = a - i \cdot b$ , le système est stable si  $a < 0$ . La fonction de transfert s'écrit donc :  $G(p) = \frac{K}{a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot p + b^2 \cdot p^2}$ . Tous les coefficients sont positifs



**À retenir**

Pour les systèmes du premier et du second ordre, la condition nécessaire est une condition suffisante.

**4.3 Influence de la partie réelle**

Plus le pôle ( $p_i = \sigma_i + j\omega_i$ ) est éloigné de l'axe des imaginaires purs, c'est-à-dire plus sa partie réelle est grande en valeur absolue, plus sa convergence ou sa divergence est rapide (c.f. FIGURE 12).

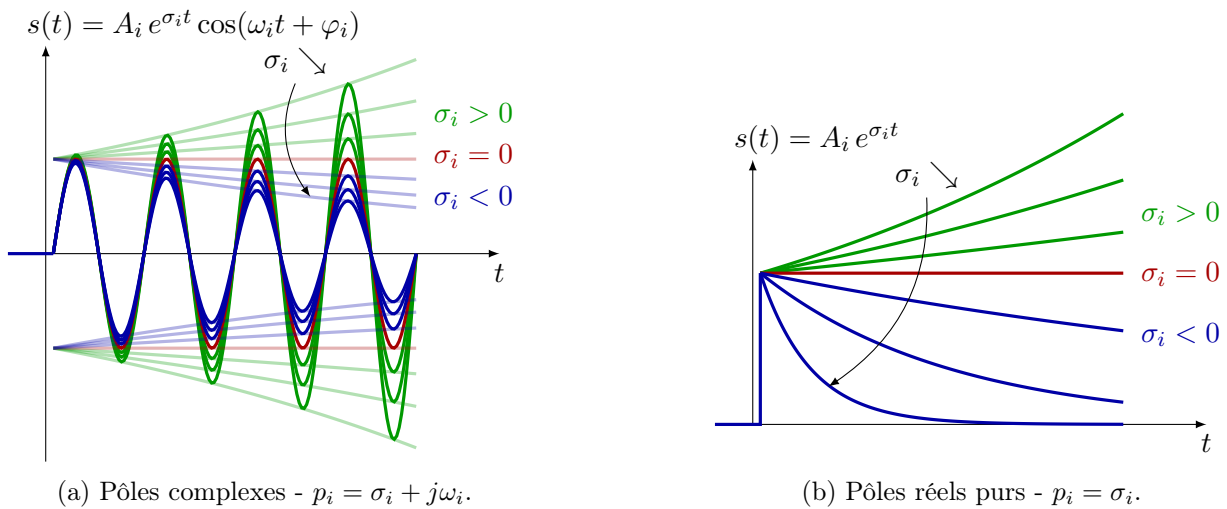


FIGURE 12 – Influence de la partie réelle des pôles  $\sigma_i$  sur la réponse impulsionnelle.

Pour simplifier certaines fonctions de transfert, on pourra *négliger* des pôles à partie réelle très négative, dont la contribution à la réponse tend pratiquement instantanément vers zéro.

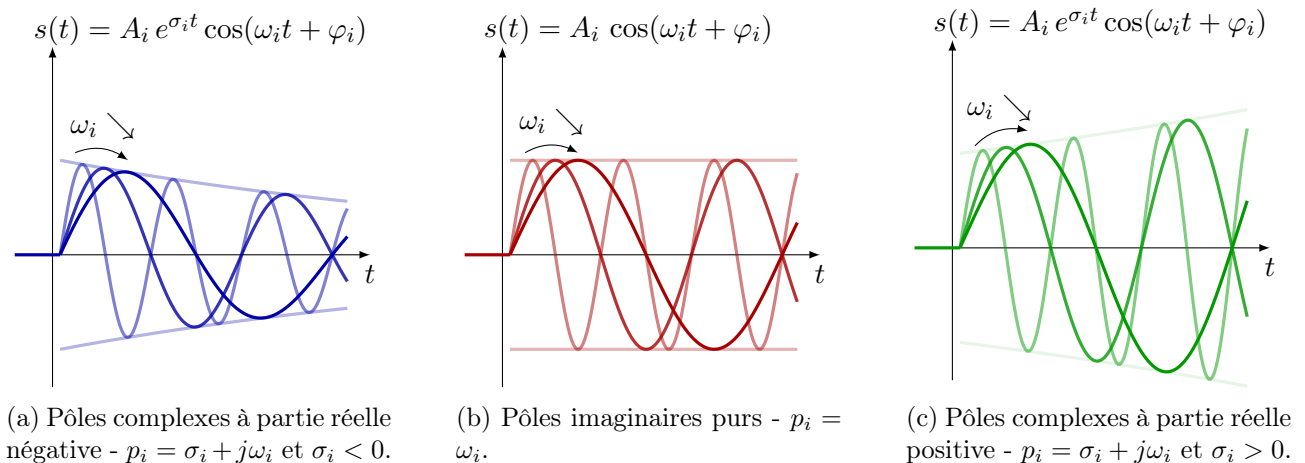


**Définition Pôle dominant**

On appelle *pôle dominant* d'un système, un pôle ayant une contribution significative dans son comportement dynamique. Ils sont situés le plus proche de l'axe des imaginaires purs.

**4.4 Influence de la partie imaginaire**

Plus un couple de pôles complexes ( $p_i = \sigma_i + j\omega_i$  et  $p_i^* = \sigma_i - j\omega_i$ ) est éloigné de l'axe des réels, c'est-à-dire plus leur partie imaginaire  $\omega_i$  est grande en valeur absolue, plus la pulsation des oscillations ou pseudo-oscillations est grande (c.f. FIGURE 13).

FIGURE 13 – Influence de la partie imaginaire des pôles  $\omega_i$  sur la réponse impulsionnelle.

#### 4.5 Réduction de l'ordre d'un système par étude du pôle dominant

Plus on modélise finement un système réel, plus sa fonction de transfert est d'un ordre élevé. En parallèle, on constate que son comportement dynamique reste très voisin de systèmes de fonction de transfert d'ordre inférieur. Si les différences comportementales sont faibles, il peut être intéressant de substituer au modèle complexe un modèle simplifié, dont l'étude est plus économique.

Une fonction de transfert  $F(p)$  quelconque, peut être mise sous la forme de produits et rapports de monômes.

$$F(p) = K \frac{\prod_{j=1}^m (p - z_j)}{\prod_{i=1}^n (p - p_i)}$$

Sous cette forme, la fonction de transfert peut être décomposée en éléments simples. Dans le cas où  $m < n$ , la décomposition de  $F(p)$  est de la forme :

$$F(p) = \sum_i \frac{A_i}{(p - p_i)} + \sum_j \frac{A_j p + B_j}{(p - \sigma_j)^2 + \omega_j^2}$$

S'ils sont suffisamment éloignés des pôles dominants, les pôles les plus éloignés de l'axe imaginaire peuvent être négligés, ce qui permet de diminuer l'ordre de la fonction de transfert  $F(p)$  modélisant le système. On peut ainsi conduire les choix de correcteurs, évaluer les performances attendues d'un système en limitant la complexité des calculs.

Nous reviendrons sur cette notion lors de l'étude du troisième critère de performances : la rapidité.

## 5 Équivalence stabilité - étude de la FTBO

Nous avons énoncé auparavant les conditions de stabilité d'une fonction de transfert. Nous avons ainsi démontré qu'étudier la stabilité du système revenait à étudier les pôles de sa fonction de transfert.

Cependant, pour des systèmes complexes le modèle de connaissance de sa fonction de transfert (en boucle fermée) peut être compliqué. Le but de cette section est de montrer l'équivalence de l'étude en boucle fermée et en boucle ouverte.



## 5.1 FTBO et FTBF

Prenons un asservissement générique (c.f. FIGURE 14).

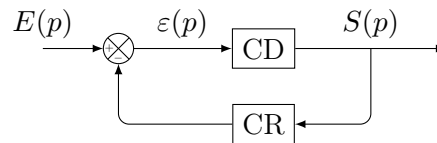


FIGURE 14 – Expression de la FTBF en fonction de la CD et de la FTBO.

À l'aide la formule de Black, on peut écrire :

$$\text{FTBF} = \frac{\text{CD}}{1 + \text{CD} \times \text{CR}}$$

$$\text{FTBO} = \text{CD} \times \text{CR}$$

$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{\text{CD}}{1 + \text{FTBO}}$$

Si jamais le dénominateur tend vers 0, alors la sortie sera infinie pour n'importe quelle valeur d'entrée. Le système est donc instable (pour une entrée bornée, la sortie ne l'est pas). Mise sous cette forme, il apparaît qu'étudier les pôles de la fonction de transfert (en boucle fermée) revient à étudier les zéros de l'équation :

$$1 + \text{FTBO} = 0$$

Qui est une équation complexe. On a alors deux équations scalaires :

$$\begin{cases} |\text{FTBO}| &= 1 \\ \text{Arg}(\text{FTBO}) &= -180^\circ \end{cases}$$

Le point  $\text{FTBO} = -1$  est ce que l'on appelle le *point critique*. Si nous le plaçons sur un graphique complexe (partie réelle en abscisse et imaginaire en ordonnée) on observe :

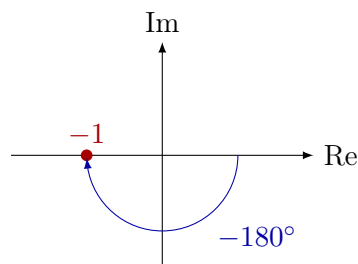


FIGURE 15 – Point critique dans le plan complexe.

Le point  $-1$  est situé à  $-180^\circ$ . La phase est négative car sinon la sortie serait en avance sur l'entrée et cela signifierait que nous remontons dans le temps. Et à une amplitude de 1, soit 0 dB.

**Propriété**

**Critère du revers** Un système est **stable en boucle fermée** si sa fonction de transfert en boucle ouverte laisse à gauche le point critique quand  $\omega$  tend vers l'infini.

**5.2 Détermination graphique des marges de gain et de phase****Dans le plan de Nyquist**

La question qu'il reste à se poser est « *À quel point est on stable ?* ». On définit ainsi deux marges caractérisant l'éloignement du lieu de la FTBO par rapport au point critique (à condition d'être « du bon côté » du point critique).

**Définition** *Marge de gain et marge de phase*

On appelle *marge de gain*  $M_G$  d'un système asservi, la distance entre le point de sa FTBO pour lequel la phase vaut  $-180^\circ$  et le point critique.

On appelle *marge de phase*  $M_\varphi$  d'un système asservi, la distance entre le point critique et le point de sa FTBO pour lequel le gain vaut 0 dB.

Soit un système décrit par la fonction de transfert :

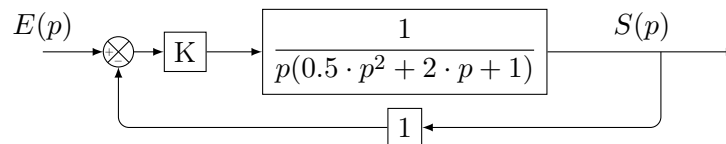


FIGURE 16 – Exemple illustré

Traçons pour  $K = 1$  le lieu de la fonction de transfert dans le diagramme de Nyquist (*c.f.* FIGURES 17).

Le point critique n'est défini que dans le plan complexe (de NYQUIST) (*c.f.* FIGURES 15).

**Remarque**

Ce critère dit *critère du revers dans le plan de Nyquist* n'est plus explicitement au programme, il n'est utilisé ici que pour préciser la problématique graphique. Cependant il est facile de retransposer ces marges dans le diagramme de Bode.

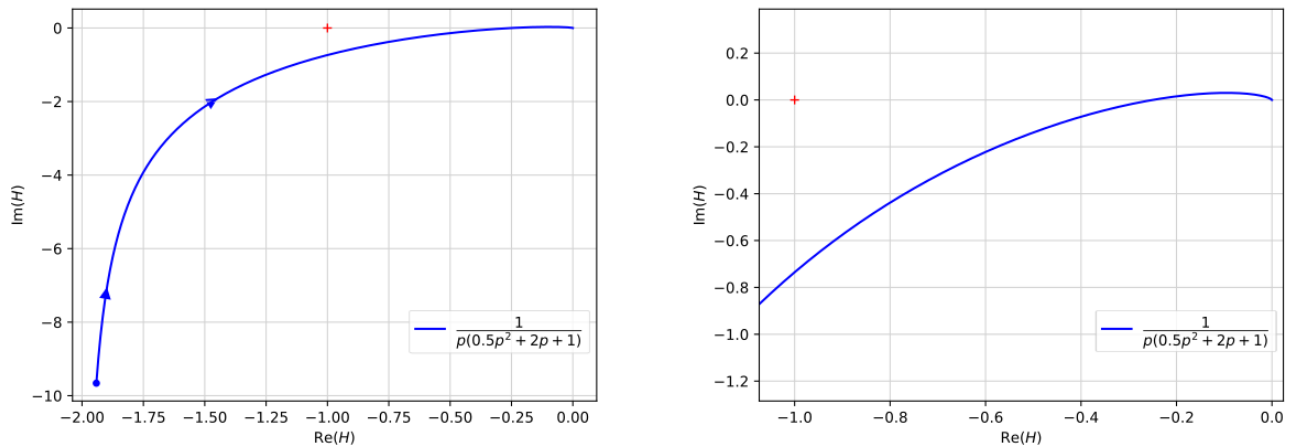
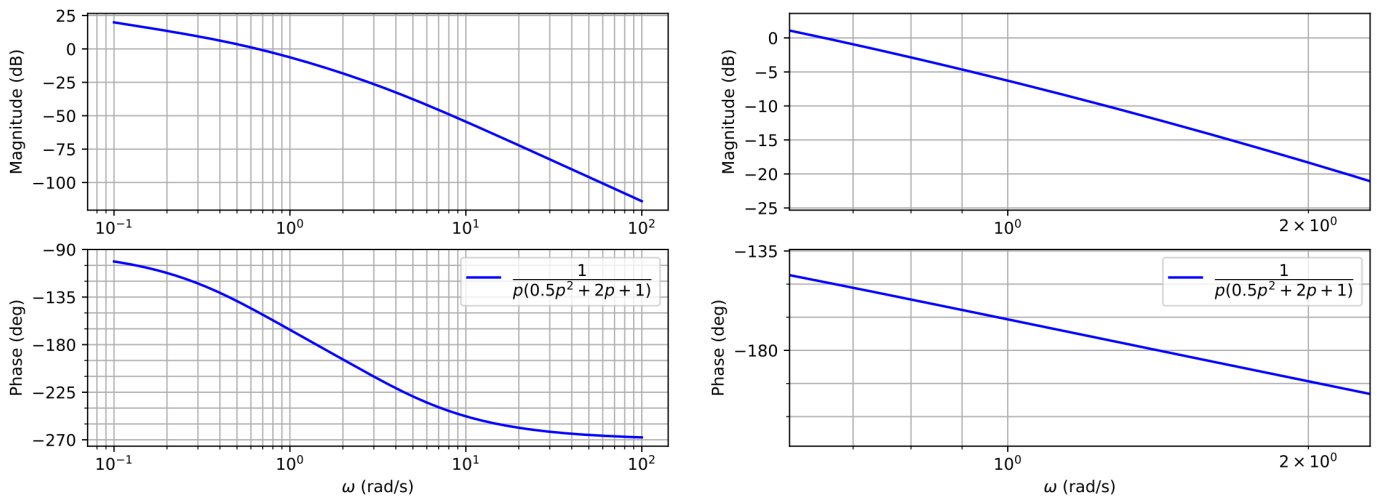


FIGURE 17 – Exemple de diagramme de Nyquist, et son zoom proche du point critique.

### Dans le diagramme de Bode

Reprenons la même fonction de transfert de l'exemple précédent et traçons son diagramme de Bode.

FIGURE 18 – Exemple de diagramme de Bode, et son zoom proche du *point critique*.

### Propriété

Un système asservi est stable s'il vérifie les deux propriétés suivantes :

1. pour la pulsation  $\omega_{C0}$  définie par  $|FTBO(j \cdot \omega_{C0})| = 1$  (soit 0 dB) de la fonction de transfert en boucle ouverte, le déphasage est supérieur à  $-180^\circ$ .
2. pour la pulsation  $\omega_{180}$  définie par  $\arg(FTBO(j \cdot \omega_{180})) = -180^\circ$  de la fonction de transfert en boucle ouverte, l'amplitude en décibel est négative (*i.e.* le gain est inférieur à 1)..

À cela on peut adjoindre plusieurs remarques.



### Remarque

1. Une seule de ces définitions suffit si les courbes sont monotones décroissantes.
2. Pour les diagrammes qui présentent plusieurs passages autour de  $-180^\circ$  pour l'argument ou autour de 0 dB pour l'amplitude, il est nécessaire de vérifier pour tous les points particuliers les deux versions du critère.
3. *Avec les mains* cela signifie que l'on cherche à atténuer (le gain étant un facteur d'amplification) les fréquences qui sont déphasées de plus de  $-180^\circ$ .

*Attention, on cherche à ne pas dépasser le point critique  $-1$ , donc la marge est définie si l'amplitude est inférieure à 1 (soit 0 dB) et la phase supérieur à  $-180^\circ$ .*

### Observation de l'influence de la position de la FTBO par rapport au point critique sur les réponse temporelle et fréquentielles

Reprenons la fonction de transfert donnée dans le schéma bloc précédent. Et cette fois ci faisons varier  $K$ .

$$G(p) = \frac{K}{p \cdot (1 + 2 \cdot p + 0,5 \cdot p^2)}$$

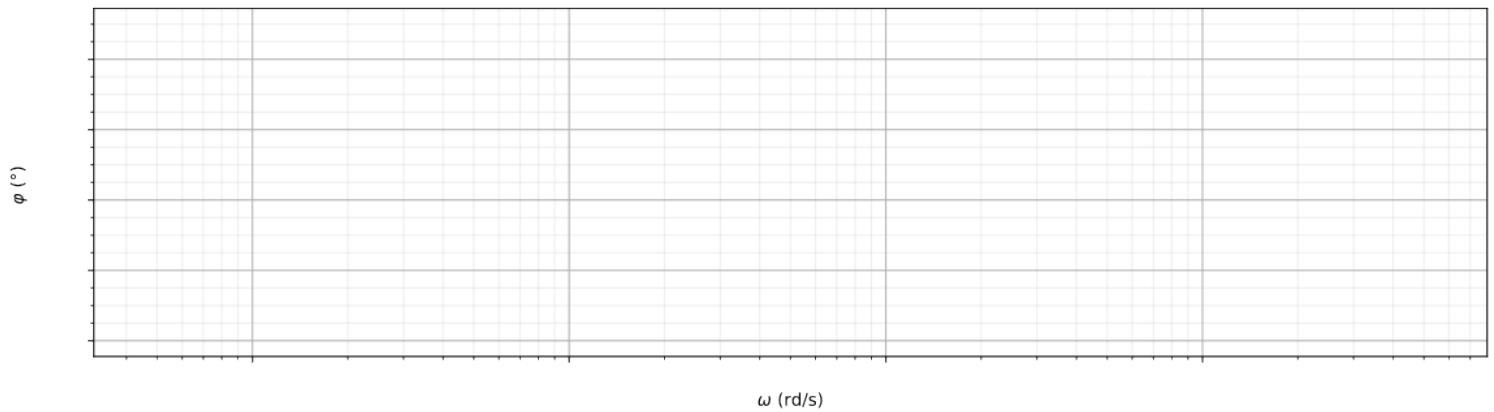
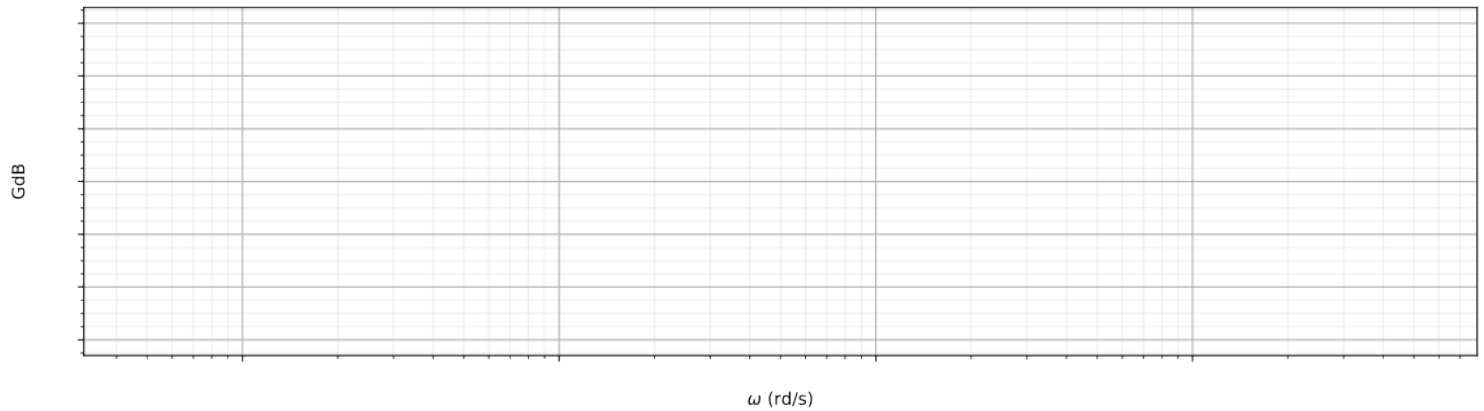


### Rappel

Changer le gain de  $K$  à  $K'$ , ne fait que translater la courbe de gain :

- vers le haut si  $K' > K$
- vers le bas si  $K' < K$

Traçons pour quelques valeurs de gain les diagramme de Bode correspondants.



Traçons maintenant les réponses temporelles de ces fonctions de transfert en boucle fermée pour différentes valeurs de  $K$ .

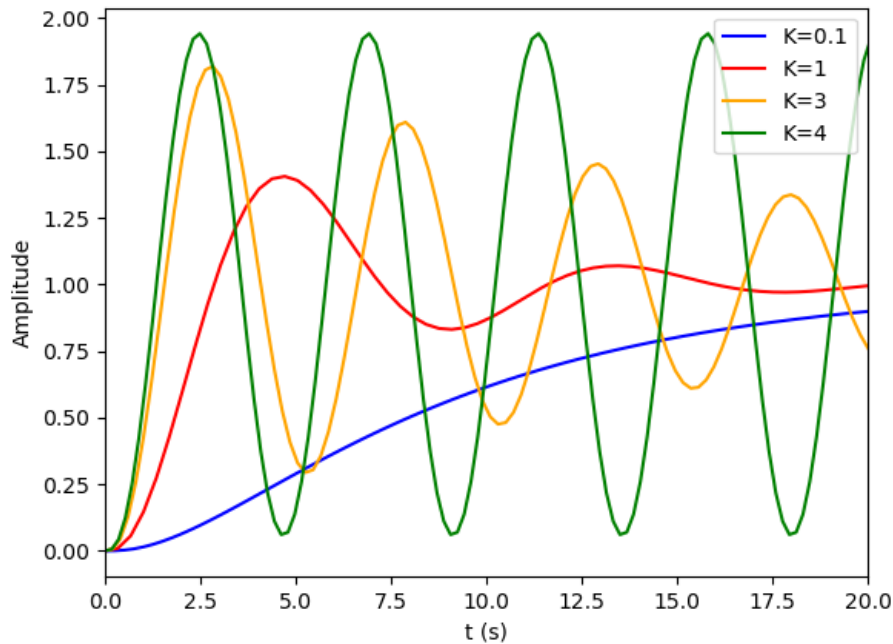


FIGURE 19 – Réponse temporelle de la fonction de transfert en boucle fermée pour différentes valeurs de  $K$



### À retenir

La réponse temporelle est d'autant plus oscillante que la distance entre la courbe de gain et 0 dB pour  $\omega_{180}$  est faible et/ou que la distance entre la courbe de phase et  $-180^\circ$  est faible.

Ces écarts aux courbes portent le nom de *Marges de stabilité*.



### Définition Marges de stabilité

- **Marge de Gain** La marge de gain est mesurée sur le diagramme d'amplitude, entre la courbe de gain de la FTBO et l'axe des abscisses pour la pulsation  $\omega_{180}$ . Le sens positif est compté de la courbe vers l'axe des abscisses.

On note  $\omega_{180}$ , la pulsation telle que  $\arg(BO(j\omega_{180})) = -180^\circ$ .

$$M_G = -20 \cdot \log(|FTBO(j\omega_{180})|)$$

- **Marge de Phase** La marge de phase est mesurée sur le diagramme de phase entre l'ordonnée  $-180^\circ$  et la courbe de phase de la FTBO pour la pulsation  $\omega_{0dB}$ . Le sens positif est compté de l'ordonnée  $-180^\circ$  à la courbe.

On note  $\omega_{0dB}$ , la pulsation telle que  $20 \log(|FTBO(j\omega_{0dB})|) = 0$  dB

$$M_\Phi = 180^\circ + \arg(FTBO(j\omega_{0dB}))$$



### Remarque

- Si le système possède un gain inférieur à 1, la marge de phase n'est pas définie.
- Si un système possède une courbe de phase qui n'atteint pas  $-180^\circ$ , la marge de gain ne peut pas être définie. On dit que la marge de gain est *infinie* (on devrait dire en toute rigueur non définie...) et le système est stable.

Voici des valeurs classiques que l'on trouve dans des systèmes industrielles :

- $M_G$  de 10 dB à 15 dB.
- $M_\phi$  de  $40^\circ$  à de  $50^\circ$ .

Ces valeurs correspondent à un comportement oscillatoire amorti analogue à celui d'un second ordre avec un coefficient d'amortissement  $\xi \approx 0,5$ .



### Application

Pour étudier la stabilité.

1. On détermine la FTBO.
2. On détermine la FTBF.
  - On vérifie la condition nécessaire (tous les coefficients du dénominateur de même signe).
3. On trace le diagramme de BODE
4. Sur le diagramme de BODE, il est nécessaire de procéder en deux temps :
  - Déterminer les pulsations  $\omega_{-180^\circ}$  et  $\omega_0$  dB ;
  - Mesurer les marges de stabilité.
5. Conclure quant à la stabilité à l'aide du critère du revers.

## 6 Lien entre marges de stabilités et dépassement

Comme on a pu le voir sur l'exemple précédent, il y a une corrélation entre la marge de phase et les oscillations de la réponse temporelle.

S'il n'est pas possible de donner un lien mathématique absolu reliant ces deux grandeurs il est possible de donner un exemple et de généraliser au moins le comportement.

Prenons la fonction de transfert en boucle ouverte du  $2^{me}$  ordre suivante :

$$FTBO(p) = \frac{K}{(1 + T \cdot p)^2}$$

### Petit exo

1. Écrire la FTBF et ces grandeurs caractéristiques.
2. Donner le premier dépassement relatif.
3. Écrire la valeur littérale de la marge de phase  $M_\phi$ .

On peut donc tracer l'évolution du dépassement  $D_{1\%}$  en fonction de la marge de phase.

```

1 D=[]
2 K=np.linspace(1,100,1000)
3 Mphi=[]
4 for i in range(len(K)):
5     D.append(np.exp(-np.pi/np.sqrt(K[i]))) # print(K)
6     Mphi.append(180-180/np.pi*np.arctan2((2*np.sqrt(K[i]-1)),(2-K[i])))
7
8
9 plt.figure()
10 plt.plot(Mphi,D,color='blue')
11 plt.xlabel('$M_\phi$')
12 plt.ylabel('$D_{1\%}$')
13 plt.grid(True)
14 plt.show()

```

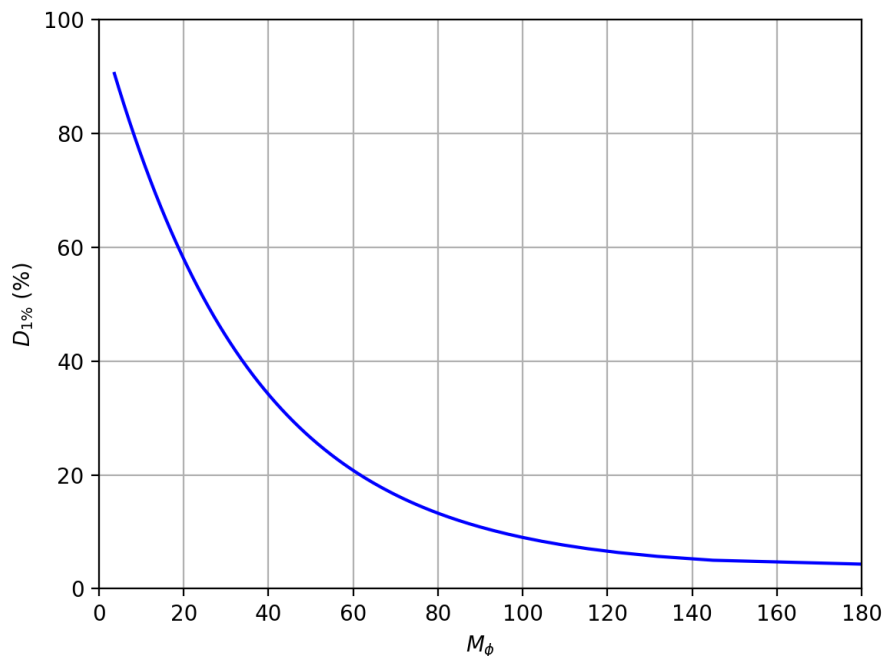


FIGURE 20 – Amplitude du premier dépassement en fonction de la marge de phase.



### Remarque

- On observe de suite que le premier dépassement relatif est d'autant plus important que la marge de phase est petite.

- Un dépassement inférieur à 5% nécessite une marge de phase supérieure 140°.