



# RÉVISIONS SLCI

TD

v1.1

*Instituion Sainte Marie – 2 Rue de l'Abbaye - 92160 Antony*

## Table des matières

1	Étude du système de dégazage d'une machine d'imagerie électronique	2
2	Étude de l'asservissement de position de l'arbre de commande de la transmission à variation continue Vario-Fendt	6
3	Caméra SPEEDCAM	10
4	Ducati Monster	15

# 1 Étude du système de dégazage d'une machine d'imagerie électronique

(Inspiré de CCP PSI 2009)

Pour étudier les échantillons de glace des glaciers, on peut utiliser une machine d'imagerie électronique. Elle permet d'envoyer un rayonnement sur la glace et, en mesurant les niveaux énergétiques des électrons qui seront émis en conséquence, de connaître sa composition chimique. Néanmoins, les niveaux énergétiques à étudier sont tels que les échantillons de glace, et donc les appareils de mesures, doivent se situer dans un vide absolu. Les chercheurs doivent alors faire face à un phénomène de dégazage des appareils de mesure qui, lorsqu'ils sont placés dans le vide, émettent des particules de gaz que leur structure moléculaire contient, faussant la mesure sur les échantillons.



FIGURE 1

Pour faire face à ce problème, une des solutions consiste à forcer le dégazage, c'est à dire porter à haute température les instruments, pour que les particules de gaz soient préalablement expulsées des appareils de mesure. Les instruments de mesure, libérés de leurs particules de gaz, peuvent donc réaliser leurs études sans polluer les échantillons de glace. On donne ci-contre un extrait de cahier des charges de la machine d'imagerie électronique.

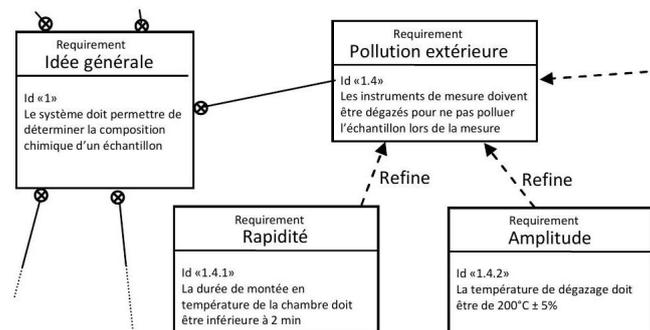


FIGURE 2

Pour réaliser un échauffement permettant d'obtenir une température de dégazage de 200°C, on utilise des bobinages qui chauffent l'air de l'enceinte d'étude. Le schéma bloc de l'ensemble est le suivant :

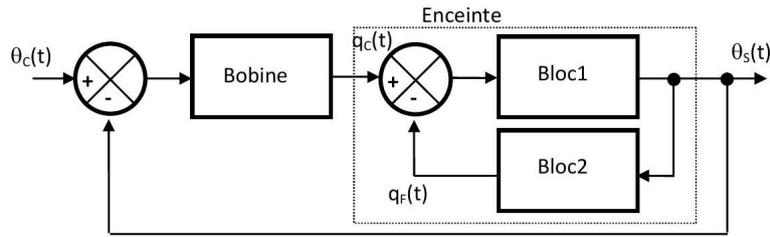


FIGURE 3

Avec :  $\theta_c(t)$  : température consigne souhaitée,  $\theta_s(t)$  : température de l'enceinte,  $q_c(t)$  : flux de chaleur dégagé par les bobinages et  $q_f(t)$  : flux de fuite de chaleur.

L'évolution de la température dans l'enceinte est gérée par le modèle de connaissance suivant :

$$\frac{d\theta_s(t)}{dt} = \frac{1}{C} \cdot [q_c(t) - q_f(t)]$$

$$q_f(t) = \frac{1}{R} \cdot \theta_s(t)$$

Hypothèse : La température de l'enceinte étant définie par rapport à celle du milieu ambiant, on se placera dans toute la suite sous les conditions d'Heaviside.

**Question 1** Déterminer l'expression des équations du modèle de connaissance dans le domaine de Laplace.

$$\frac{d\theta_s(t)}{dt} = \frac{1}{c} \cdot [q_c(t) - q_f(t)] \rightarrow p \cdot \theta_s(p) = \frac{1}{c} \cdot [Q_c(p) - Q_f(p)]$$

$$q_f(t) = \frac{1}{R} \cdot \theta_s(t) \rightarrow Q_f(p) = \frac{1}{R} \cdot \theta_s(p)$$

**Question 2** Compléter le schéma-bloc du système et déterminer les fonctions de transferts des blocs  $F(p)$  et  $G(p)$ .

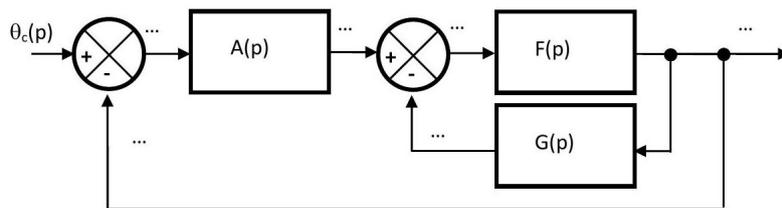


FIGURE 4

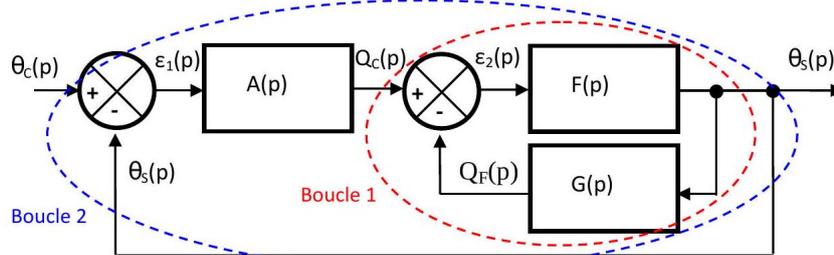


FIGURE 5

$$\text{Avec : } F(p) = \frac{\theta_S(p)}{Q_C(p) - Q_F(p)} = \frac{1}{C \cdot p} \text{ et } G(p) = \frac{Q_F(p)}{\theta_S(p)} = \frac{1}{R}$$

**Question 3** Déterminer l'expression de la fonction de transfert  $\frac{\theta_S(p)}{\theta_C(p)}$  lorsque la fonction de transfert de la bobine est une constante  $A(p) = A$ . Exprimer le résultat en fonction de  $A, R, C$  et  $p$ .

$$\text{FTBF boucle 1 : } \frac{\theta_s(p)}{Q_c(p)} = \frac{1}{G(p)} \cdot \frac{F(p) \cdot G(p)}{1 + F(p) \cdot G(p)} = R \cdot \frac{\frac{1}{R \cdot C \cdot p}}{1 + \frac{1}{R \cdot C \cdot p}} = \frac{R}{1 + R \cdot C \cdot p}$$

$$\text{FTBF boucle 2 : } \frac{\theta_s(p)}{\theta_c(p)} = \frac{\frac{R \cdot A}{1 + R \cdot C \cdot p}}{1 + \frac{R \cdot A}{1 + R \cdot C \cdot p}} = \frac{R \cdot A}{R \cdot C \cdot p + R \cdot A + 1} = \frac{\frac{R \cdot A}{R \cdot A + 1}}{\frac{R \cdot C}{R \cdot A + 1} \cdot p + 1}$$

**Question 4** Montrer que la fonction de transfert  $\frac{\theta_S(p)}{\theta_C(p)}$  peut se mettre sous la forme  $\frac{K}{1 + T \cdot p}$  avec  $K$  et  $T$ , deux constante à déterminer en fonction de  $A, C$  et  $R$ .

$$\frac{\theta_S(p)}{\theta_C(p)} = \frac{\frac{R \cdot A}{R \cdot A + 1}}{\frac{R \cdot C}{R \cdot A + 1} \cdot p + 1} = \frac{K}{1 + T \cdot p} \text{ avec } K = \frac{R \cdot A}{R \cdot A + 1} \text{ et } T = \frac{R \cdot C}{R \cdot A + 1}.$$

Pour chauffer l'enceinte, on impose une entrée dont l'évolution est représentée sur le schéma ci dessous.

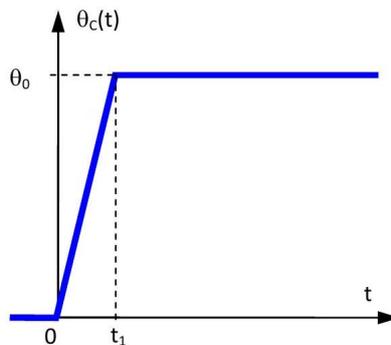


FIGURE 6

**Question 5** On néglige dans un premier temps la rampe initiale de  $\theta_C(t)$ . On considère donc que l'entrée est approximée par un échelon d'amplitude  $\theta_0$ . Déterminer les expressions analytiques de  $\theta_C(p)$ ,  $\theta_S(p)$  et en déduire celle de  $\theta_S(t)$  en fonction de  $K$  et  $T$ .

$$\text{Échelon d'amplitude } \theta_0 \rightarrow \theta_C(p) = \frac{\theta_0}{p} \quad \theta_S(p) = \frac{K}{T \cdot p + 1} \cdot \theta_C(p) \rightarrow \theta_S(p) = \frac{K}{T \cdot p + 1} \cdot \frac{\theta_0}{p} \rightarrow \theta_S(t) = K \cdot \theta_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right) \cdot u(t) \rightarrow$$

**Question 6** Tracer la représentation graphique de  $\theta_s(t)$  et indiquer sur le graphique les caractéristiques particulières de la courbe.

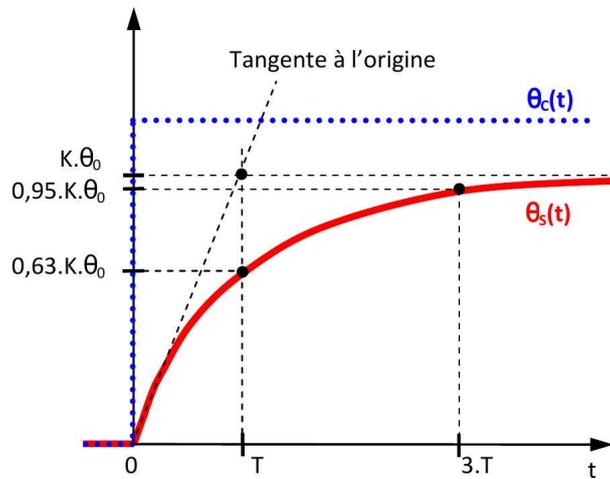


FIGURE 7

Courbe caractéristique de  $\theta_s(t)$  obtenue pour  $K < 1$ .

**Question 7** On donne les valeurs numérique suivantes :  $K = 3$ ,  $T = 20$  s. Conclure quant à la capacité du système à satisfaire au critère de durée de montée de la température du cahier des charges.

Pour  $t = 3.T$  soit  $t = 60$  s on obtient 95% de la valeur asymptotique  $t_{5\%} = 60$  s  $< 2$  min  $\rightarrow$  C.d.C.F. ok.

**Question 8** On ne néglige plus la rampe initiale de  $\theta_c(t)$ . Déterminer l'expression analytique de  $\theta_C(p)$  en fonction de  $\theta_0$  et  $t_1$ .

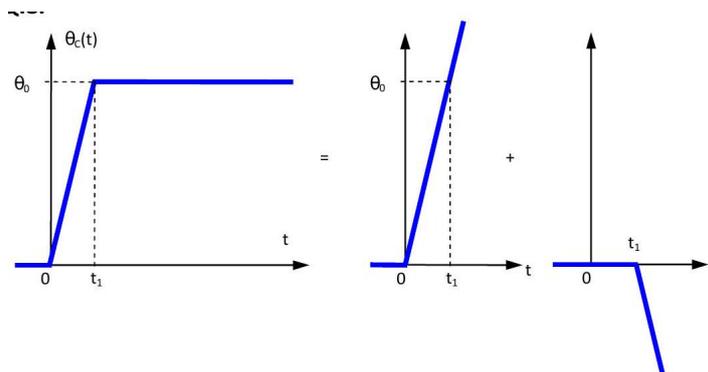


FIGURE 8

$$\theta_c(p) = \frac{\theta_0}{t_1 \cdot p^2} - \frac{\theta_0}{t_1 \cdot p^2} \cdot e^{-t_1 p}$$

**Question 9** Déterminer  $\lim_{t \rightarrow \infty} \theta_s(t)$  quand la température consigne (et donc souhaitée) est de  $200^\circ\text{C}$ . Conclure quant à la capacité du système à satisfaire le critère de température de la phase de dégazage du cahier des charges.

On a  $\theta_s(p) = \frac{K}{T \cdot p + 1} \cdot \theta_c(p)$  avec  $\theta_c(p) = \frac{\theta_0}{t_1 \cdot p^2} - \frac{\theta_0}{t_1 \cdot p^2} \cdot e^{-t_1 p}$

$$\begin{aligned} \theta_S(+\infty) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \theta_S(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \theta_S(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{K}{T \cdot p + 1} \cdot \left( \frac{\theta_0}{t_1 \cdot p^2} - \frac{\theta_0}{t_1 \cdot p^2} \cdot e^{-t_1 p} \right) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{K}{T \cdot p + 1} \cdot \frac{\theta_0}{t_1 \cdot p} \cdot (1 - e^{-t_1 p}) \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{K \cdot \theta_0}{T \cdot p + 1} \cdot \frac{1}{t_1 \cdot p} (1 - 1 + t_1 \cdot p) \text{ (développement limité)} \\ &= K \cdot \theta_0 = 600 \end{aligned}$$

On pouvait simplement utiliser la rampe de tout à l'heure aussi :  $\theta_s(p) = \frac{K}{T \cdot p + 1} \cdot \theta_c(p)$  avec  $\theta_c(p) = \frac{200}{p} \rightarrow \theta_S(+\infty) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \theta_S(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \theta_s(p) = 200 \cdot K = 600 \rightarrow$  C.d.C.F. non respecté.

Pour améliorer les performances, on change l'amplificateur pilotant les bobines, ce qui permet de choisir des fonctions  $A(p)$  plus adaptées. Différentes solutions sont possibles et la simulation du comportement du système, avec plusieurs amplificateurs possibles, est donnée sur la figure suivante.

**Question 10** Sélectionner et justifier quel amplificateur paraît le mieux adapté pour satisfaire tous les critères du cahier des charges.

L'amplificateur ayant pour fonction de transfert  $A_2(p)$  est le mieux adapté pour satisfaire les critères de durée de montée en T°C et de température de dégazage du cahier des charges.

## 2 Étude de l'asservissement de position de l'arbre de commande de la transmission à variation continue Vario-Fendt

(Inspiré de CCP MP 2008)

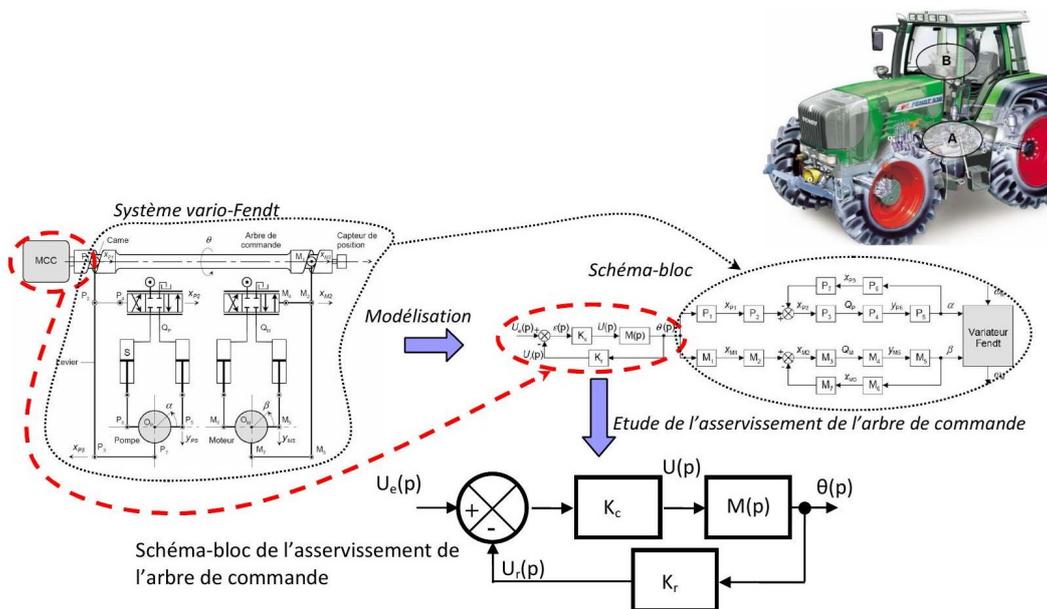


FIGURE 9

Le thème proposé concerne la transmission à variation continue développée par la société Fendt qui équipe les gammes de tracteurs «Fendt 300 Vario» à " Fendt 900 Vario ». On s'intéresse ici plus par-

ticulièrement à l'asservissement de position de l'arbre de commande de cette transmission situé dans la zone A sur le schéma.

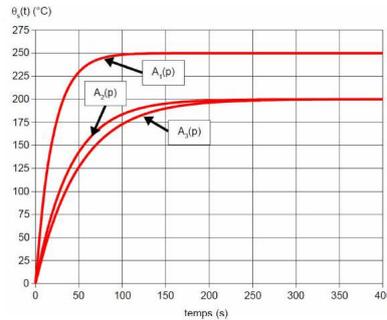


FIGURE 10

Sur un engin agricole, la transmission à variation continue remplace les fonctions de l'ensemble boîte de vitesse à commande manuelle + embrayage que l'on retrouve classiquement sur la plupart des voitures. On ne peut pas utiliser la solution boîte de vitesse à commande manuelle + embrayage car l'énergie cinétique d'un engin agricole n'est pas suffisante pour permettre le passage d'une vitesse (fonction de la boîte de vitesse) par désaccouplement de l'arbre moteur (fonction de l'embrayage) sans caler. La transmission à variation continue permet donc d'adapter de façon optimale la vitesse d'avancement du tracteur en fonction de ses conditions d'utilisation sans avoir à désaccoupler le moteur du reste de la chaîne de transmission de puissance. Pour commander le variateur, le conducteur dispose au sein de la cabine (partie B) d'un joystick. Le joystick permet d'agir sur l'inclinaison d'éléments hydrostatiques par l'intermédiaire d'un moteur à courant continu asservi en position entraînant un arbre de commande à came. On donne le modèle de connaissance de l'asservissement de l'arbre moteur du système vario-Fendt ainsi qu'un extrait de cahier des charges.

On utilisera les notations et les données suivantes :

- $K_c$  : gain du correcteur à action proportionnelle,
- $K_r = 2 \text{ V/rd}$  : gain du capteur de position monté sur l'arbre de commande,
- $M(p)$  : fonction de transfert du moteur.

Le moteur électrique est un moteur à courant continu dont les équations caractéristiques sont les suivantes :  $u(t)$  : tension appliquée aux bornes du moteur

$$u(t) = R \cdot i(t) + k_e \cdot \frac{d\theta(t)}{dt} : \text{courant d'induit}$$

$R$  : résistance de l'induit avec  $R = 2\Omega$ ,

$J_e$  : inertie de l'arbre de commande avec  $J_e = 6,25 \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ,

$$J_e \cdot \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = k_a \cdot i(t)$$

$k_e$  : constante de force contre électromotrice avec  $k_e = 0,05 \text{ V}/(\text{rad/s})$ ,

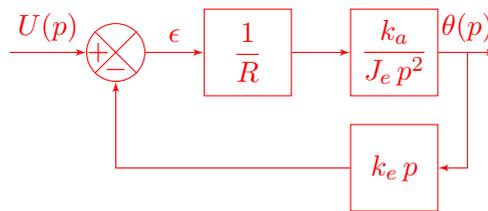
$k_a$  : constante de couple avec  $k_a = 0,05 \text{ Nm/A}$ .

On considère nulles toutes les conditions initiales.

Exigences	Critères	Niveaux
...	...	...
Le système doit permettre l'asservissement en position de l'arbre de commande du système Vario-Fendt	Temps de réponse pour une entrée échelon	< 1 s ...

**Question 1** Déterminer la fonction de transfert  $M(p) = \frac{\theta(p)}{U(p)}$  du moteur électrique et montrer qu'elle peut se mettre sous la forme canonique  $M(p) = \frac{K_m}{p \cdot (1 + \tau_m \cdot p)}$ . Donner les expressions littérales de  $K_m$  et  $\tau_m$ . Calculer  $K_m$  et  $\tau_m$ .

$$u(t) = R \cdot i(t) + k_e \cdot \frac{d\theta(t)}{dt} \rightarrow U(p) = R \cdot I(p) + k_e \cdot p \cdot \theta(p) \quad J_e \cdot \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = k_a \cdot i(t) \rightarrow J_e \cdot p^2 \cdot \theta(p) = k_a \cdot I(p)$$



$$M(p) = \frac{\theta(p)}{U(p)} = \frac{1}{k_e \cdot p} \cdot \frac{\frac{k_a \cdot k_e \cdot p}{R \cdot J_e \cdot p^2}}{1 + \frac{k_a \cdot k_e \cdot p}{R \cdot J_e \cdot p^2}} = \frac{1}{k_e \cdot p} \cdot \frac{k_a \cdot k_e}{1 + \frac{k_a \cdot k_e}{R \cdot J_e \cdot p}}$$

$$M(p) = \frac{1}{k_e \cdot p} \cdot \frac{1}{1 + \frac{R \cdot J_e}{k_a \cdot k_e} \cdot p} = \frac{\frac{1}{k_e}}{p \cdot \left(1 + \frac{R \cdot J_e}{k_a \cdot k_e} \cdot p\right)} = \frac{k_m}{p \cdot (1 + \tau_m \cdot p)}$$

Avec :

$$K_m = \frac{1}{k_e} \quad \tau_m = \frac{R J_e}{k_a k_e}$$

$$\text{A.N. : } K_m = \frac{1}{k_e} = \frac{1}{0,05} = 20 \text{ rad}/(\text{s} \cdot \text{V}) \quad \tau_m = \frac{R \cdot J_e}{k_a \cdot k_e} = \frac{2 \times 6,25 \cdot 10^{-4}}{0,05^2} = 0,5 \text{ s} \quad \left( \frac{\Omega \cdot \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{A}}{\text{V} \cdot \text{s} \cdot \text{N} \cdot \text{m}} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^2}{\text{s} \cdot \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{m}} \right)$$

$$T(p) = \frac{K_c \cdot K_r \cdot K_m}{p \cdot (1 + \tau_m \cdot p)}$$

avec

$$K_{BO} = K_c \cdot K_r \cdot K_m$$

**Question 2** Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée  $F(p)$  et montrer qu'elle peut se mettre sous la forme d'un système du second ordre :  $F(p) = \frac{K_{BF}}{\left(1 + \frac{2z}{\omega_0} p + \frac{1}{\omega_0^2} p^2\right)}$ . Donner l'expression

littérale de  $K_{BF}$ ,  $z$  et  $\omega_0$  en fonction de  $K_{BO}$  et  $\tau_m$ .

$$F(p) = \frac{1}{K_r} \cdot \frac{T(p)}{1 + T(p)} = \frac{1}{K_r} \cdot \frac{K_c K_r K_m}{\tau_m p^2 + p + K_c K_r K_m}$$

$$F(p) = \frac{\frac{1}{K_r}}{\frac{\tau_m}{K_c \cdot K_r \cdot K_m} \cdot p^2 + \frac{1}{K_c \cdot K_r \cdot K_m} p + 1} = \frac{\frac{1}{K_r}}{\frac{\tau_m}{K_{BO}} \cdot p^2 + \frac{1}{K_{BO}} p + 1} = \frac{K_{BF}}{\left(1 + \frac{2 \cdot z}{\omega_b} p + \frac{1}{\omega_b^2} p^2\right)}$$

$$K_{BF} = \frac{1}{K_r} \quad ; \quad \frac{1}{\omega_f^2} = \frac{\tau_m}{K_{BO}} \rightarrow \omega_f = \sqrt{\frac{K_{BO}}{\tau_m}} \quad ; \quad \frac{2 \cdot z}{\omega_f} = \frac{1}{K_{BO}} \rightarrow z = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{K_{BO} \cdot \tau_m}}$$

**Question 3** Déterminer la valeur du gain de boucle  $K_{BO}$  de telle sorte que la réponse à une entrée de type échelon soit la plus rapide possible sans toutefois produire de dépassement. En déduire la valeur du gain  $K_c$  de l'action proportionnelle du correcteur.

Réponse à une entrée de type échelon la plus rapide possible sans toutefois produire de dépassement  $\rightarrow z = 1$  (c.f. cours).  $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{K_{BO} \cdot \tau_m}} = 1 \rightarrow \frac{1}{K_{BO} \cdot \tau_m} = 4 \rightarrow K_{BO} = \frac{1}{4 \cdot \tau_m} = 0,5 = K_c \cdot K_r \cdot K_m$   
D'où :  $K_c = \frac{0,5}{K_r \cdot K_m} = \frac{0,5}{2 \times 20} = 0,0125$  (sans unité ce qui est normal pour un correcteur à action proportionnelle).

Si  $z = 1$  le dénominateur admet deux pôles réels confondus  $p_1 = p_2 = -\omega_0$  (voir cours réponse temporelle système du deuxième ordre cas  $z = 1$ ). Par conséquent on a :  $F(p) = \frac{K_{BF}}{\left(1 + \frac{2 \cdot z}{\omega_f} p + \frac{1}{\omega_f^2} p^2\right)} =$

$$\frac{K_{BF}}{\left(1 + \frac{2}{\omega_f} p + \frac{1}{\omega_f^2} p^2\right)} = \frac{K_{BF}}{\left(1 + \frac{1}{\omega_f} p\right)^2} \quad K_{BF} = \frac{1}{K_r} \rightarrow$$

$$\text{A.N. : } K_{BF} = \frac{1}{2} = 0,5 \text{rd/V T} = \frac{1}{\omega_0} = \sqrt{\frac{\tau_m}{K_{BO}}} \rightarrow \text{A.N. : } T = \sqrt{\frac{0,5}{0,5}} = 1 \text{ s}$$

**Question 4** La figure ci dessous montre la réponse du moteur à un échelon d'amplitude 2V. Déterminer graphiquement le temps de réponse à 5% global du système.

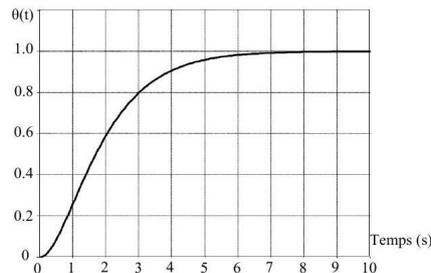


FIGURE 11

$t_{r5\%} \approx 5$  s. Le système ne respecte pas les exigences du C.d.C.F. Il faut diviser par 10 le temps de réponse.

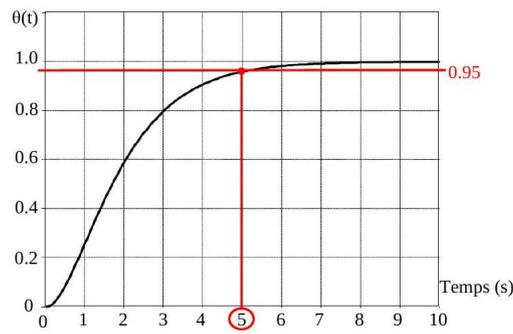


FIGURE 12

**Question 5** Conclure vis-à-vis de l'exigence de rapidité du cahier des charges.

c.f. question 6

### 3 Caméra SPEEDCAM

#### 3.1 Présentation du système

L'étude porte sur la caméra de poursuite SPEEDCAM utilisée pour filmer les compétitions sportives (athlétisme, football, rugby...) se déroulant dans un stade et étant diffusées à la télévision. La caméra est fixée sur un chariot se déplaçant sur un rail le long du terrain, permettant ainsi de suivre l'un des acteurs du jeu durant son déplacement. Ce rail est le plus petit au monde permettant d'atteindre des vitesses supérieures à 15 m/s.

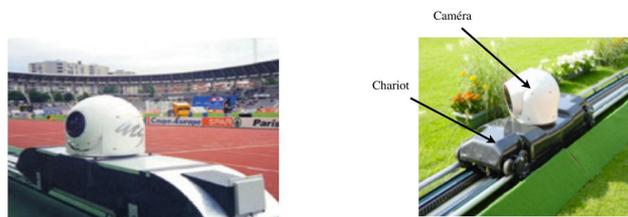


FIGURE 13 – Système de caméra de poursuite sur son rail

Un extrait du cahier des charges mis sous forme de diagramme des exigences donne quelques précisions sur les performances attendues du système :

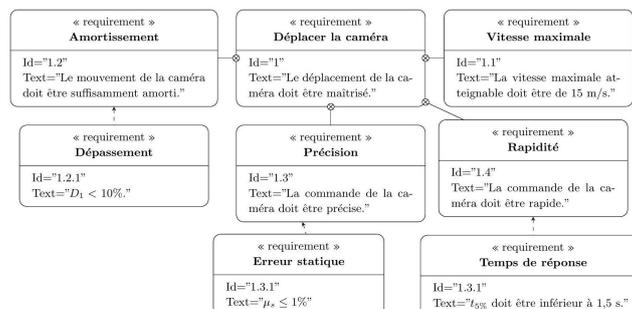


TABLE 1 – CdCF

### 3.2 Fonctionnement du système

La caméra a pour objectif de suivre le mouvement d'un athlète se déplaçant parallèlement au bord du terrain (ou de la piste). Le chariot supportant la caméra est donc un système asservi en vitesse afin de déplacer la caméra à la vitesse désirée par le caméraman.

Cette partie traite de l'étude de l'asservissement en vitesse du chariot supportant la caméra. Pour réaliser cet asservissement, le système est composé de plusieurs éléments :

- un capteur de vitesse (dont la fonction de transfert est notée  $K_V$ ) qui convertit la mesure de la vitesse réelle  $V$  du chariot en une tension  $U_e$  ;
- un convertisseur (dont la fonction de transfert est notée  $K_C$ ) qui convertit la consigne de vitesse  $V_c$  en une tension de consigne  $U_c$  ;
- un amplificateur (dont la fonction de transfert est notée  $K_A$ ) qui, à partir de l'écart mesuré entre la tension de consigne  $U_c$  et la tension  $U_e$  établit la tension de commande du moteur  $U_m$  ;
- un ensemble moteur+chariot (de fonction de transfert  $H(p)$ ) qui à partir de la tension  $U_m$  réalise le déplacement à une vitesse  $V$ .

On utilisera par la suite les valeurs suivantes :

$$-K_V = 0,3 \text{ V} \cdot \text{s/m};$$

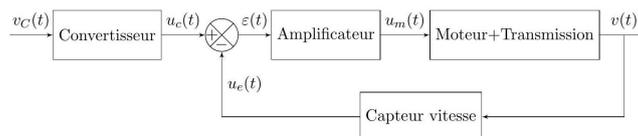
$$-K_A = 0,7;$$

$$-K_C = 0,3 \text{ V} \cdot \text{s/m}.$$

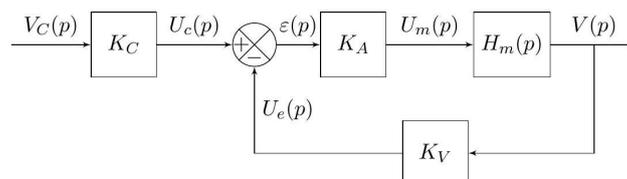
### 3.3 Modélisation de l'asservissement

#### 3.3.1 1 Schéma-blocs

**Question 1** Tracer le schéma-blocs topo-fonctionnel relatif à l'asservissement en vitesse du chariot de caméra. On placera sur ce schéma les différentes grandeurs en entrée et sortie des blocs, avec leurs unités respectives.



**Question 2** En déduire le schéma-blocs relatif à l'asservissement en vitesse. On placera les différentes grandeurs en entrée et sortie des blocs.



### 3.3.2 Modélisation du comportement du chariot

L'ensemble moteur+chariot (dont la fonction de transfert représentative est notée  $H(p)$ ) possède un comportement relativement complexe à modéliser. En effet, il possède de nombreux éléments dont certaines caractéristiques ne sont pas connues, ce qui empêche, a priori, de déterminer précisément la fonction de transfert  $H(p)$ .

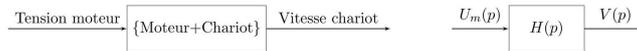


FIGURE 14 – Modélisation de l'ensemble moteur+chariot

Afin de modéliser le comportement de l'ensemble moteur+chariot, on choisit de réaliser une mesure et de proposer un modèle simple représentatif. Pour cela, on observe la réponse obtenue en sortie du capteur de vitesse ( $U_e(t)$ ) lorsque l'on applique un échelon de tension  $U_m(t) = U_0 u(t)$  en entrée de l'ensemble moteur+chariot (cf. figure 3).

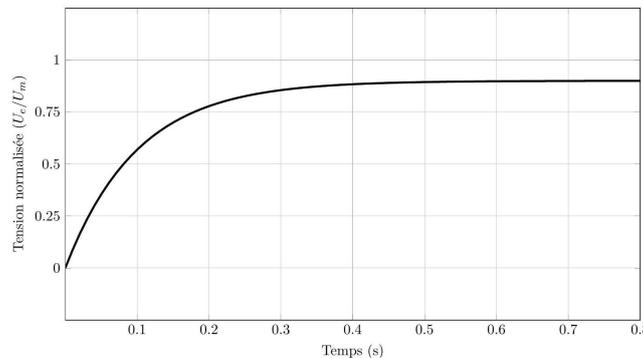


FIGURE 15 – Réponse obtenue par le capteur de vitesse pour une entrée  $U_m$  en échelon

On choisit un modèle du premier ordre (de gain  $K_m$  et de constante de temps  $\tau_m$ ) pour identifier le comportement de l'ensemble moteur+chariot.

**Question 3** Justifier le choix d'un modèle du premier ordre. **Modèle du premier ordre :**

- pente non nulle à l'origine
- pas de point d'inflexion

**Question 4** Déterminer à l'aide de la courbe les valeurs de  $K_m$  et  $\tau_m$ . On expliquera la méthode utilisée. D'après la courbe, on a  $\tau_m = 0,1s$  et  $K_m = 3\text{rad}\cdot\text{s}^{-1} \cdot \text{V}^{-1}$ . Pour les méthodes de détermination :

- $K_m$  : valeur finale vaut  $K_m K_v$
- $\tau_m$  : intersection de la valeur finale avec la tangente à l'origine
- $\tau_m$  :  $t_{5\%} \simeq 3\tau_m$
- $\tau_m$  : on est à 63% de la valeur finale à  $t = \tau_m$

**Question 5** En déduire l'expression de  $H(p)$ . **Fonction de transfert du premier ordre :**

$$H(p) = \frac{K_m}{1 + \tau_m p} = \frac{3}{1 + 0,1p}$$

### 3.4 Étude des performances du système bouclé

On cherche dans cette partie à caractériser les performances en rapidité et en précision du système asservi. Dans toute la suite, on gardera les expressions des fonctions de transfert en fonction des notations  $K_A, K_C, \dots$ . On veillera à n'utiliser les valeurs numériques que lorsqu'elles sont nécessaires.

**Question 6** Déterminer la fonction de transfert totale  $H_{T1}(p) = \frac{V(p)}{V_c(p)}$  du chariot asservi. **Fonction de transfert complète :**

$$H_{T1}(p) = \frac{K_C K_A H(p)}{1 + K_A K_V H(p)} = \frac{K_C K_A K_m}{1 + \tau_m p + K_A K_V K_m} = \frac{\frac{K_C K_A K_m}{1 + K_A K_V K_m}}{1 + \frac{\tau_m p}{1 + K_A K_V K_m}}$$

**Question 7** La mettre sous forme canonique et identifier ses paramètres caractéristiques. **Fonction de transfert sous forme caractéristique (fonction du premier ordre) :**

$$H_{T1}(p) = \frac{K_1}{1 + \tau_1 p} \quad \text{avec} \quad K_1 = \frac{K_C K_A K_m}{1 + K_A K_V K_m} \quad \text{et} \quad \tau_1 = \frac{\tau_m}{1 + K_A K_V K_m}$$

Un système est précis en réponse à un échelon si l'écart statique tend vers 0 en régime établi :  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mu(t) = \mu_s = 0$ .

**Question 8** Pour une entrée en échelon de type  $V_c(p) = \frac{1}{p}$ , déterminer l'expression de  $\mu_s$  et conclure sur la précision du système. **Écart en sortie de comparateur  $\varepsilon$  :**

$$\begin{aligned} \varepsilon(p) &= U_c(p) - U_e(p) = V_c(p)K_C - V(p)K_V = V_c(p)K_C - V_c(p)H_{T1}(p)K_V \\ &= V_c(p) [K_C - K_V H_{T1}(p)] \end{aligned}$$

**Théorème de la valeur finale :**

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} [K_C - K_V H_{T1}(p)] = K_C - K_V K_1 \neq 0$$

Le système n'est donc pas précis.

### 3.5 Amélioration de la précision

Une méthode classique pour améliorer la précision est l'ajout d'un intégrateur (fonction de transfert  $\frac{1}{p}$ ) dans la chaîne directe. Cet ajout se fait en amont de l'amplificateur. On appelle correcteur les éléments ajoutés à la partie commande destinés à améliorer la qualité de l'asservissement.

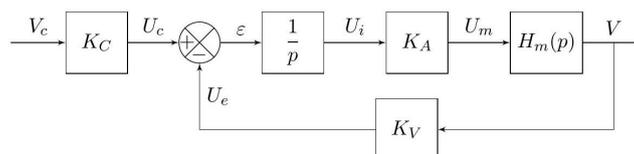


FIGURE 16 – Schéma-blocs de l'asservissement en vitesse avec intégrateur.

**Question 9** Déterminer la fonction de transfert totale  $H_{T2}(p) = \frac{V(p)}{V_c(p)}$  du chariot asservi avec correcteur intégral. **En plaçant un intégrateur dans la boucle, on a :**

$$H_{T2}(p) = \frac{K_C K_A K_m}{p(1 + \tau_m(p)) + K_A K_V K_m} = \frac{\frac{K_C}{K_V}}{1 + \frac{p}{K_A K_V K_m} + \frac{\tau_m p^2}{K_A K_V K_m}}$$

**Question 10** La mettre sous forme canonique et identifier ses paramètres caractéristiques. **ous** forme caractéristique :

$$H_{T2}(p) = \frac{\frac{K_C}{K_V}}{1 + \frac{p}{K_A K_V K_m} + \frac{\tau_m p^2}{K_A K_V K_m}} = \frac{K_2}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

Soit :

$$K_2 = \frac{K_C}{K_V} = 1 \quad ; \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{K_m K_V K_A}{\tau_m}} \simeq 2,51 \text{ rad/s} ; \quad \xi = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\tau_m K_m K_V K_A}} \simeq 2$$

**Question 11** Pour une entrée en échelon de type  $V_c(p) = \frac{1}{p}$ , déterminer l'expression de l'écart  $\mu(p)$  et conclure sur la précision du système.

$\varepsilon(p) = V_c(p) [K_C - K_V H_{T2}(p)]$ . Théorème de la valeur finale :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0^+} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0^+} [K_C - K_V H_{T2}(p)] = K_C - K_V \cdot \frac{K_C}{K_V} = 0$$

Le système est donc précis.

**Question 12** Mettre la dénominateur de la fonction de transfert  $H_{T2}(p)$  sous la forme  $(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)$ .

On a  $\xi > 1$ , on cherche à factoriser mettre  $H_{T2}(p)$  sous la forme  $\frac{K_2}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)}$ . On sait déjà que  $K_2 = \frac{K_C}{K_V}$ . Pour le dénominateur, il faut déterminer les racines :

$$\Delta = \left(\frac{2\xi}{\omega_0}\right)^2 - \frac{4}{\omega_0^2} \quad \text{soit} \quad r_{1,2} = \omega_0 \left(-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}\right) \quad \text{et} \quad \begin{cases} r_1 \simeq -0,67 \\ r_2 \simeq -9,36 \end{cases}$$

Alors :

$$\begin{aligned} H_{T2}(p) &= \frac{K_2}{\frac{1}{r_1 r_2} (p - r_1)(p - r_2)} = \frac{K_2}{\left(-\frac{p}{r_1} + 1\right) \left(-\frac{p}{r_2} + 1\right)} \\ &= \frac{K_2}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \tau_1 = -\frac{1}{r_1} \simeq 1,49 \text{ s} \\ \tau_2 = -\frac{1}{r_2} \simeq 0,11 \text{ s} \end{cases} \end{aligned}$$

Grâce à la transformée inverse de Laplace, il est possible de déterminer l'expression de  $v(t)$  lorsque l'on soumet le système à une sollicitation en échelon d'amplitude  $V_0$ . Il vient :

$$v(t) = K_2 V_0 \left(1 - \frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} e^{-t/\tau_1} - \frac{\tau_2}{\tau_2 - \tau_1} e^{-t/\tau_2}\right) u(t)$$

**Question 13** Tracer l'allure de  $v(t)$ .

On a donc  $H_{T2}(p) = \frac{K_2}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)}$ , donc  $V(p) = \frac{V_0}{p} \frac{K_2}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)}$ . On décompose l'expression de  $V(p)$  sous la forme de trois éléments simples :

$$V(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{1 + \tau_1 p} + \frac{C}{1 + \tau_2 p}$$

- pour A , on multiplie par p puis on évalue en  $p = 0$  :  $A = V_0 K_2$
- pour B , on multiplie par  $(1 + \tau_1 p)$  puis on évalue en  $p = \frac{-1}{\tau_1}$  :  $B = \frac{-\tau_1^2 V_0 K_2}{\tau_1 - \tau_2}$
- pour C, on multiplie par  $(1 + \tau_2 p)$  puis on évalue en  $p = \frac{-1}{\tau_2}$  :  $C = \frac{-\tau_2^2 V_0 K_2}{\tau_2 - \tau_1}$

En utilisant la transformée de Laplace donnée, on trouve, pour tout  $t > 0$  :

$$v(t) = V_0 K_2 \left[ 1 + \frac{\tau_1}{\tau_2 - \tau_1} e^{-\frac{t}{\tau_1}} + \frac{\tau_2}{\tau_1 - \tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right]$$

Après calcul, on obtient  $t_{r5\%} \simeq 5s$ .

**Question 14** Le système ainsi corrigé respecte-t-il le cahier des charges ? Conclure sur le rôle du correcteur. **Le cahier des charges est bien vérifié d'un point de vu précision puisque  $K_2 = 1$ . Néanmoins le système ne sera pas suffisamment rapide  $5 > 1,5$ , ce correcteur n'est pas suffisant pour atteindre les performances exigées.**

## 4 Ducati Monster

### 4.1 I Mise en situation

#### 4.1.1 Contexte

La moto est un moyen de transport plus léger et plus maniable qu'une voiture et qui offre des sensations fortes de conduite.

On se propose ici d'étudier l'une d'elles, le Monster commercialisé par Ducati.

#### Présentation

Classé dans la catégorie des roadsters, le Monster se démarque par son cadre treillis tubulaire. Plutôt destiné à une utilisation urbaine, ce type de moto se prête également à des trajets routiers, bien que l'absence de carénage expose le conducteur à la pression du vent.



FIGURE 17 – Le Monster en version 696cc

Comme toute moto, elle est constituée :

- d'un cadre, qui assure la liaison entre tous les autres composants ;
- d'un ensemble de direction, qui permet d'orienter la roue avant ;
- d'un système de suspension arrière ;
- de deux roues ;
- d'un ensemble motorisé (moteur + boîte de vitesses + transmission), qui entraîne la roue arrière.

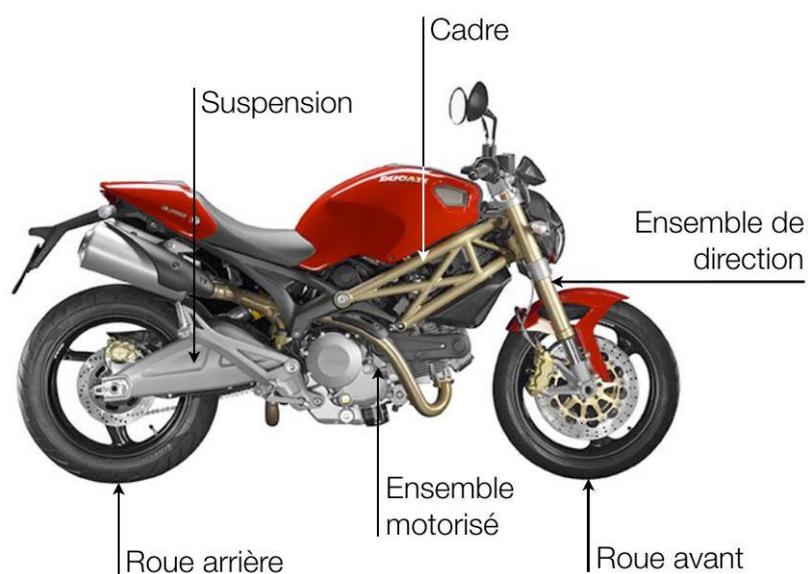


FIGURE 18 – Principaux éléments

## 4.2 Performances globales et cahier des charges

Son analyse fonctionnelle permet de faire ressortir l'extrait de cahier des charges suivant.

Critère	Niveau	Limite
Stabilité	Autonome pour $V > 40$ km/h	-
Vitesse de déplacement (km/h)	(0 130)	(mini,maxi)
Numéro du rapport de boîte idéal à vitesse maximale	6	-
Fréquence des oscillations perçues à haute vitesse (Hz)	5	maxi

TABLE 2 – Extrait du cahier des charges associé à la fonction principale FS1 : permettre au conducteur de se déplacer sur la route

### 4.2.1 Vérification des performances des suspensions

On considère que le Monster se déplace en ligne droite sur une route possédant des défauts géométriques. La moto est donc soumise à des perturbations et des oscillations qu'il est nécessaire de filtrer pour le confort des usagers. Les suspensions avant et arrière sont les solutions techniques envisagées pour remplir cette fonction :

- la suspension avant est constituée d'une fourche contenant un ressort et un amortisseur ;
- la suspension arrière, quant à elle, est de type bras oscillant avec un ressort et un amortisseur.



FIGURE 19 – Localisation



FIGURE 20 – Fourches



FIGURE 21 – Amortisseur et ressort

#### 4.2.2 Modélisation, paramétrage et hypothèses

Le modèle d'étude retenu est représenté sur l'illustration suivante. La moto est ainsi composée de :

- un cadre 1 ;
- une roue arrière 3 ;
- une roue avant 4 ;
  - un bras oscillant 5 ;
  - une tige d'amortisseur 6 ;
  - un corps d'amortisseur 7 ;
- un amortisseur avant 8.

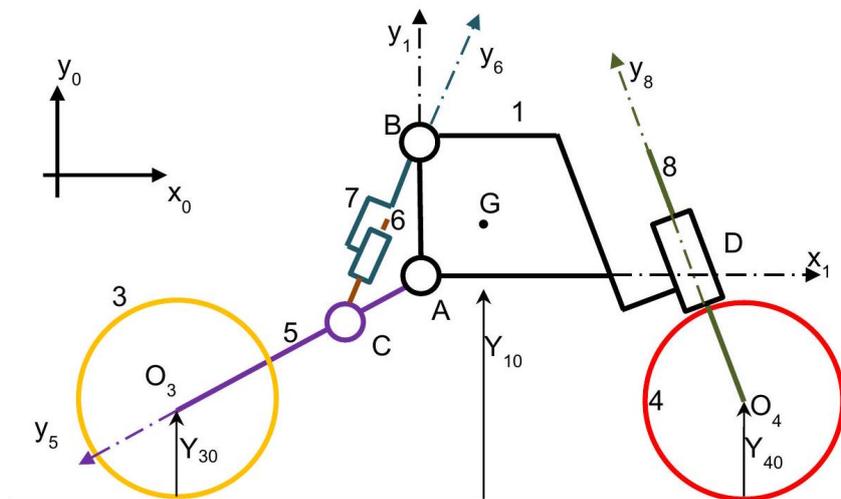


FIGURE 22 – Paramétrage sur route plane

Lorsque la route présente des défauts géométriques, deux systèmes ressort-amortisseur, placés entre les pièces 6 et 7 et entre les pièces 1 et 8, respectivement de raideur  $k_{67}$ , d'amortissement  $b_{67}$  et de raideur  $k_{18}$ , d'amortissement  $b_{18}$ , sont sollicités.

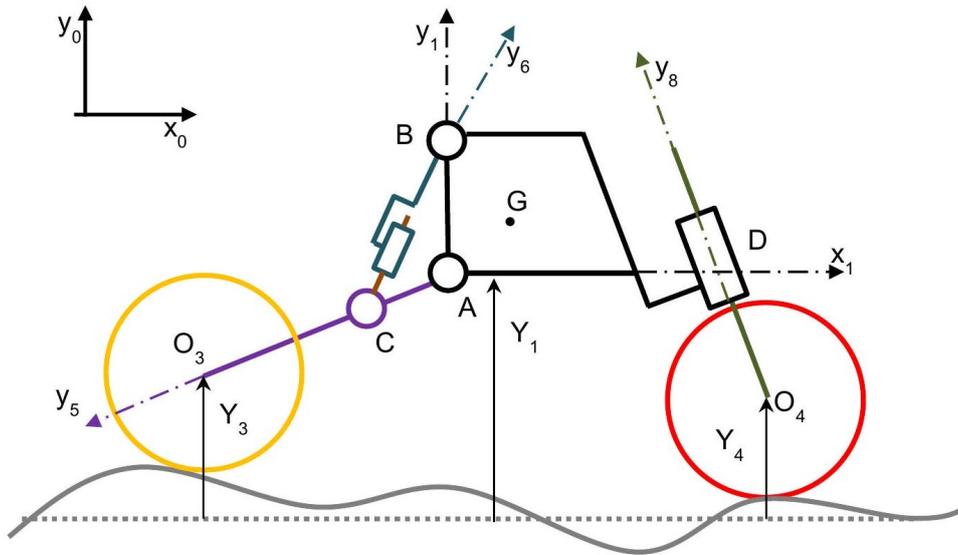


FIGURE 23 – Paramétrage sur route possédant des irrégularités géométriques

On définit ainsi les grandeurs  $Y_1(t)$ ,  $Y_3(t)$  et  $Y_4(t)$ , donnant la position du cadre et des roues par rapport à leurs positions sur route plane, ainsi que les grandeurs géométriques suivantes :

$$\overrightarrow{AC} = L_5 \cdot \vec{y}_5 \quad ; \quad \overrightarrow{AB} = L_1 \cdot \vec{y}_1 \quad ; \quad \overrightarrow{AO_3} = L_3 \cdot \vec{y}_3 \quad ; \quad \overrightarrow{CB} = \lambda_6(t) \cdot \vec{y}_6$$

### 4.3 Impact des défauts de la route sur le comportement dynamique de la moto

Une étude de dynamique permet d'obtenir, à partir des allongements trouvés dans la partie précédente, l'équation de mouvement de la moto :

$$\begin{aligned} m_1 \cdot \Delta \ddot{Y}_1 = & - \frac{k_{18}}{\cos^2 \alpha} \cdot (\Delta Y_1 - \Delta Y_4) - k_{67} \cdot \left( \frac{L_1 \cdot L_5}{L_3 \cdot \lambda_6} \right)^2 \cdot (\Delta Y_1 - \Delta Y_3) \\ & - \frac{b_{18}}{\cos^2 \alpha} \cdot (\Delta \dot{Y}_1 - \Delta \dot{Y}_4) - b_{67} \cdot \left( \frac{L_1 \cdot L_5}{L_3 \cdot \lambda_6} \right)^2 \cdot (\Delta \dot{Y}_1 - \Delta \dot{Y}_3) \end{aligned}$$

où  $m_1$  est la masse de l'ensemble { cadre + pilote + direction };  $m_1 = 280$  kg. Les masses des autres pièces sont négligées devant celle-ci.

Cette équation peut se mettre sous la forme du schéma-blocs suivant.

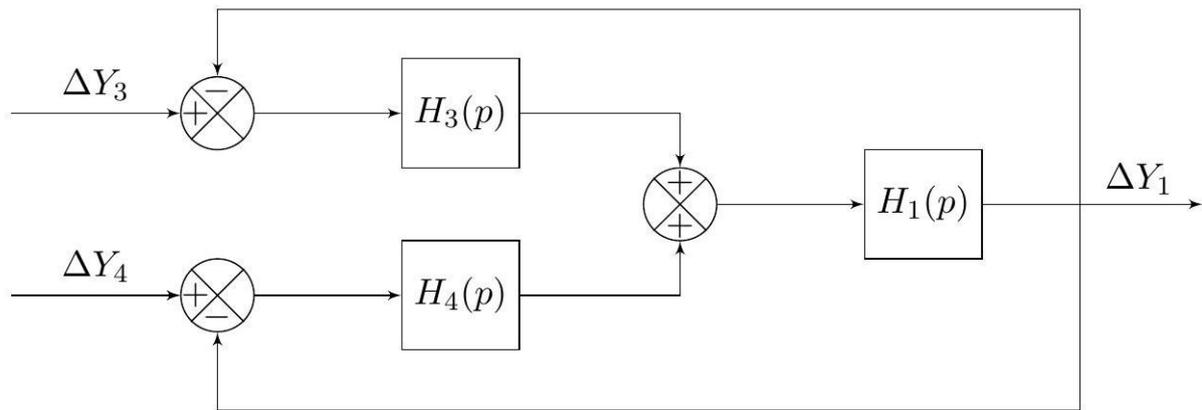


FIGURE 24 – Schéma-blocs traduisant le comportement du cadre de la moto lors du roulage sur une route possédant des défauts géométriques

**Question 1** Déterminer les expressions des fonctions  $H_1(p)$ ,  $H_3(p)$  et  $H_4(p)$  sous les conditions de Heaviside.

On passe l'équation du mouvement de la moto dans le domaine de Laplace, sous les conditions de Heaviside :

$$m_1 \cdot p^2 \cdot \Delta Y_1 = -\frac{k_{18}}{\cos^2 \alpha} \cdot (\Delta Y_1 - \Delta Y_4) - k_{67} \cdot \left(\frac{L_1 \cdot L_5}{\lambda_6 \cdot L_3}\right)^2 \cdot (\Delta Y_1 - \Delta Y_3) - \frac{b_{18}}{\cos^2 \alpha} \cdot p \cdot (\Delta Y_1 - \Delta Y_4) - b_{67} \cdot \left(\frac{L_1 \cdot L_5}{\lambda_6 \cdot L_3}\right)^2 \cdot p \cdot (\Delta Y_1 - \Delta Y_3)$$

soit

$$m_1 \cdot p^2 \cdot \Delta Y_1 = \left[ \frac{k_{18}}{\cos^2 \alpha} + \frac{b_{18}}{\cos^2 \alpha} \cdot p \right] \cdot (\Delta Y_4 - \Delta Y_1) + \left[ k_{67} \cdot \left(\frac{L_1 \cdot L_5}{\lambda_6 \cdot L_3}\right)^2 + b_{67} \cdot \left(\frac{L_1 \cdot L_5}{\lambda_6 \cdot L_3}\right)^2 \cdot p \right] \cdot (\Delta Y_3 - \Delta Y_1)$$

Or, d'après le schéma-blocs, on peut écrire :

$$\Delta Y_1(p) = H_1(p) \cdot [H_3(p) \cdot (\Delta Y_3(p) - \Delta Y_1(p)) + H_4(p) \cdot (\Delta Y_4(p) - \Delta Y_1(p))]$$

On identifie alors les fonctions de transfert  $H_i(p)$  :

$$H_1(p) = \frac{1}{m_1 \cdot p^2}$$

$$H_3(p) = \left(\frac{L_1 \cdot L_5}{\lambda_6 \cdot L_3}\right)^2 [k_{67} + b_{67} \cdot p] \quad H_4(p) = \frac{1}{\cos^2 \alpha} [k_{18} + b_{18} \cdot p]$$

On suppose que les roues arrière et avant sont toujours en contact avec le sol (pas de perte de contact). De plus, le basculement avant/arrière de la moto n'est pas pris en compte. Dans ce cas, la roue arrière va simplement subir les mêmes oscillations du sol que la roue avant, mais avec un retard caractérisé par le temps :

$$t_{\text{retard}} = \frac{e}{V}$$

où  $e$  est tel que  $e = \overrightarrow{O_3O_4} \cdot \vec{x}_1$ .

On en déduit donc que  $\Delta Y_3(t) = \Delta Y_4(t - t_{\text{retard}})$  soit, dans le domaine de Laplace :

$$\Delta Y_3(p) = \Delta Y_4(p) \cdot H_2(p)$$

**Question 2** Exprimer alors la fonction de transfert  $H(p) = \frac{\Delta Y_1(p)}{\Delta Y_4(p)}$  en fonction des fonctions  $H_i(p)$ .

D'après le schéma-blocs, on peut écrire :

$$\Delta Y_1(p) \cdot [1 + H_1(p) \cdot (H_3(p) + H_4(p))] = H_1(p) \cdot H_3(p) \cdot \Delta Y_3(p) + H_1(p) \cdot H_4(p) \cdot \Delta Y_4(p)$$

D'où la fonction de transfert  $H(p)$  :

$$H(p) = \frac{\Delta Y_1(p)}{\Delta Y_4(p)} = \frac{H_1(p) \cdot (H_2(p) \cdot H_3(p) + H_4(p))}{1 + H_1(p) \cdot (H_3(p) + H_4(p))}$$

La fonction  $H(p)$  dépend de plusieurs paramètres, dont certains évoluent pendant une phase de roulage : masse, vitesse, raideurs des amortisseurs à progressivité variable, etc. Il est donc impossible de l'étudier directement pour tous les cas possibles. La suite de ce sujet ne s'intéresse qu'aux deux cas extrêmes  $V = 130$  km/h (comportement sur autoroute) et  $V \simeq 0$  km/h (comportement en quasi statique à l'équilibre).

#### 4.4 Validation du critère de fréquence des oscillations perçues à haute vitesse

Pour  $V = 130$  km/h, les diagrammes de Bode de  $H(p)$  sont représentés sur la figure 1.7.

##### 4.4.1 Oscillations dues au tracé de la route

**Question 3** Quel phénomène physique apparaît sur les diagrammes de gain et phase ?

L'extrémum apparaissant sur le diagramme de gain, sans remontée de la phase en regard, est caractéristique du phénomène de résonance.

**Question 4** Déterminer graphiquement le facteur  $Q_r$  caractérisant ce phénomène. Donner la valeur de la pulsation  $\omega_r$  associée.

Par définition, le facteur de résonance s'écrit :

$$Q_r = \frac{|H(j\omega_r)|}{|H(0)|}$$

où  $\omega_r$  est la pulsation de résonance, abscisse de l'extrémum. Ici,  $\omega_r \simeq 19$  rad/s. Or, on lit sur le diagramme de gain la valeur de l'extrémum à 22,3 dB et un gain nul en basses pulsations.

$$20 \log |H(\omega_r)| = 22,3 \text{ et } 20 \log |H(0)| = 0$$

D'où :

$$Q_r = \frac{10^{\frac{22,3}{20}}}{10^{\frac{0}{20}}} = 10^{\frac{22,3}{20}} \simeq 13$$

L'amplitude d'un signal sinusoïdal de pulsation  $\omega_r$  serait alors multipliée par 13!

**Question 5** Par combien serait multipliée l'amplitude d'entrée d'un signal sinusoïdal de pulsation  $\omega = 2\text{rad/s}$  pour obtenir l'amplitude de signal de sortie ? Même question pour  $20\text{rad/s}$  et  $200\text{rad/s}$ .

De la même façon, on peut déterminer les coefficients multiplicatifs pour d'autres pulsations :

Pulsation	2rad/s	20rad/s	200rad/s
Coefficient multiplicateur	1	13	0,01

Pour une pulsation de  $200\text{rad/s}$ , on diminue l'amplitude.

**Question 6** Déterminer la pulsation de coupure  $\omega_{c0}$  à partir de laquelle une diminution des amplitudes des oscillations perçues apparaît. On parle de bande passante à  $0\text{dB}$ .

En fait, la remarque précédente est vraie pour toutes les pulsations supérieures à la pulsation de coupure à  $0\text{dB}$  :

$$\omega_{c0} \simeq 28\text{rad/s}$$

**Question 7** Cette valeur est-elle conforme au cahier des charges ?

Cela nous permet de remonter à une valeur de fréquence de coupure :

$$f \simeq 4,46\text{Hz}$$

Celle-ci est inférieure à  $5\text{Hz}$  ; le cahier des charges est donc bien respecté.

#### 4.4.2 Oscillations dues au nid de poule

On retient le modèle simplifié suivant pour caractériser  $H(p)$  :

$$H(p) = \frac{K \cdot (1 + \tau p)}{1 + \frac{2 \cdot z}{\omega_0} \cdot p + \frac{1}{\omega_0^2} \cdot p^2}$$

avec  $\frac{1}{\tau} > \omega_0$ .

**Question 8** En étudiant les diagrammes asymptotiques de  $H(p)$ , justifier la cohérence de ce modèle.

On décompose la fonction de transfert  $H(p)$  en un produit de deux fonctions de transfert :

$$H(p) = H_a(p) \cdot H_b(p) \quad \text{avec} \quad H_a(p) = \frac{K}{1 + \frac{2 \cdot z}{\omega_0} \cdot p + \frac{1}{\omega_0^2} \cdot p^2} \quad \text{et} \quad H_b(p) = 1 + \tau p$$

Pour résumer les asymptotes en gain et phase associées à chaque fonction de transfert harmonique, on dresse les tableaux suivants :

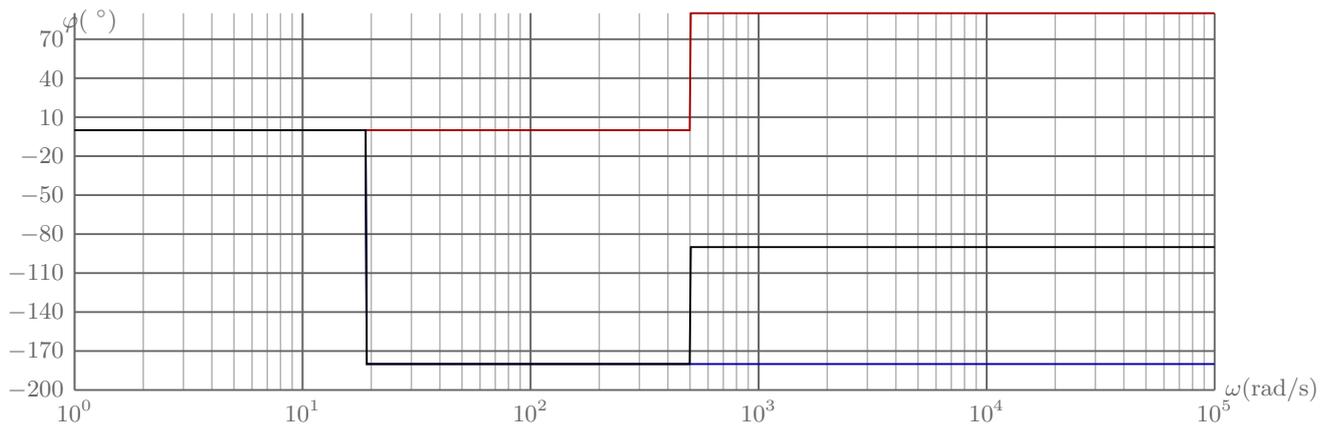
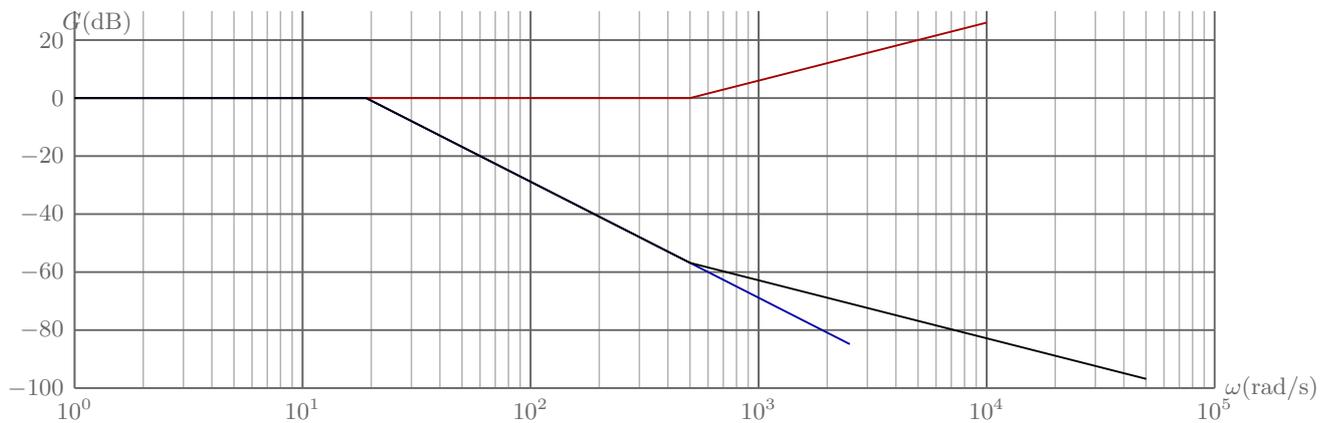
	$\omega \ll \omega_0$	$\omega = \omega_0$	$\omega \gg \omega_0$
$G_{dB_a}(\omega)$	$20 \log K$	$20 \log \left( \frac{K}{2z} \right)$	$20 \log (K \cdot \omega_0^2) - 40 \log \omega$
$\phi_a(\omega)$	0	$-\frac{\pi}{2}$	$-\pi$

Étude de la fonction de transfert harmonique  $H_a(j\omega)$

	$\omega \ll \frac{1}{\tau}$	$\omega = \frac{1}{\tau}$	$\omega \gg \frac{1}{\tau}$
$G_{dB_b}(\omega)$	0	$20 \log(\sqrt{2})$	$20 \log(\tau) + 20 \log \omega$
$\phi_b(\omega)$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$

Étude de la fonction de transfert harmonique  $H_b(j.\omega)$

On trace chaque diagramme asymptotique puis on les somme graphiquement pour obtenir le diagramme asymptotique de  $H(j \cdot \omega)$ . Comme  $\frac{1}{\tau} > \omega_0$ , on obtient alors les allures suivantes.



Ces diagrammes asymptotiques se superposent bien aux tracés réels de la figure 10; le modèle proposé est donc cohérent.

**Question 9** Déterminer la valeur du gain  $K$ .

Par analogie entre les tracés asymptotique et réel, on a  $20 \log K = 0$ , c'est-à-dire :

$$K = 1$$

**Question 10** À l'aide du facteur  $Q_r$ , déterminer la valeur du coefficient d'amortissement  $z$ . On rappelle que

$$Q_r = \frac{1}{2z\sqrt{1-z^2}}$$

On a déjà mesuré le facteur de résonance. On écrit donc directement

$$Q_r = \frac{1}{2z\sqrt{1-z^2}} \simeq 13$$

La résolution de cette équation donne 4 solutions :  $z \simeq \pm 0,999$  et  $z \simeq \pm 0,019$ . Or,  $z$  est forcément positif et, puisqu'il y a résonance, le coefficient d'amortissement est forcément inférieur à  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ . D'où :

$$z \simeq 0,019$$

**Question 11** En déduire, après lecture de la pulsation de résonance, la valeur de la pulsation propre  $\omega_0$ .

La pulsation de résonance s'exprime en fonction de la pulsation propre et du coefficient d'amortissement par :

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2 \cdot z^2}$$

Or, on a lu précédemment sa valeur :  $\omega_r \simeq 19 \text{ rad/s}$ . On en déduit alors la valeur de la pulsation propre :

$$\omega_0 \simeq 19,01 \text{ rad/s}$$

L'amortissement est si petit que fréquence propre du système non amorti et fréquence de résonance peuvent être considérées comme confondues.

**Question 12** À l'aide du diagramme de phase, identifier la valeur numérique de  $\tau$ .

Pour  $\omega = \frac{1}{\tau}$ , la phase vaut  $-\frac{3 \cdot \pi}{4} \text{ rad} = -135^\circ$ . On identifie alors la constante de temps :

$$\tau \simeq \frac{1}{450} \simeq 0,002 \text{ s}$$

On s'intéresse à présent à une sollicitation de type Dirac (on roule à haute vitesse sur un défaut de la route) :

$$\Delta Y_4(t) = \delta(t)$$

Sa transformée inverse  $\Delta Y_1(t)$  s'écrit alors :

$$\Delta Y_1(t) = K \cdot \omega_0 \cdot e^{-z \cdot \omega_0 \cdot t} \left[ \tau \cdot \omega_0 \cdot \sin \left( \omega_0 \cdot \sqrt{1 - z^2} \cdot t \right) + (1 - z \cdot \tau \cdot \omega_0) \cdot \cos \left( \omega_0 \cdot \sqrt{1 - z^2} \cdot t \right) \right] \cdot u(t)$$

où  $u(t)$  est l'échelon unitaire.

**Question 13** En déduire la pseudo-pulsation  $\omega$  puis la pseudo-fréquence  $f$  des oscillations perçues lors du passage sur un défaut de la route.

La pseudo-pulsation  $\omega$  vaut :

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - z^2}$$

Grâce aux valeurs déterminées précédemment, on obtient la valeur :

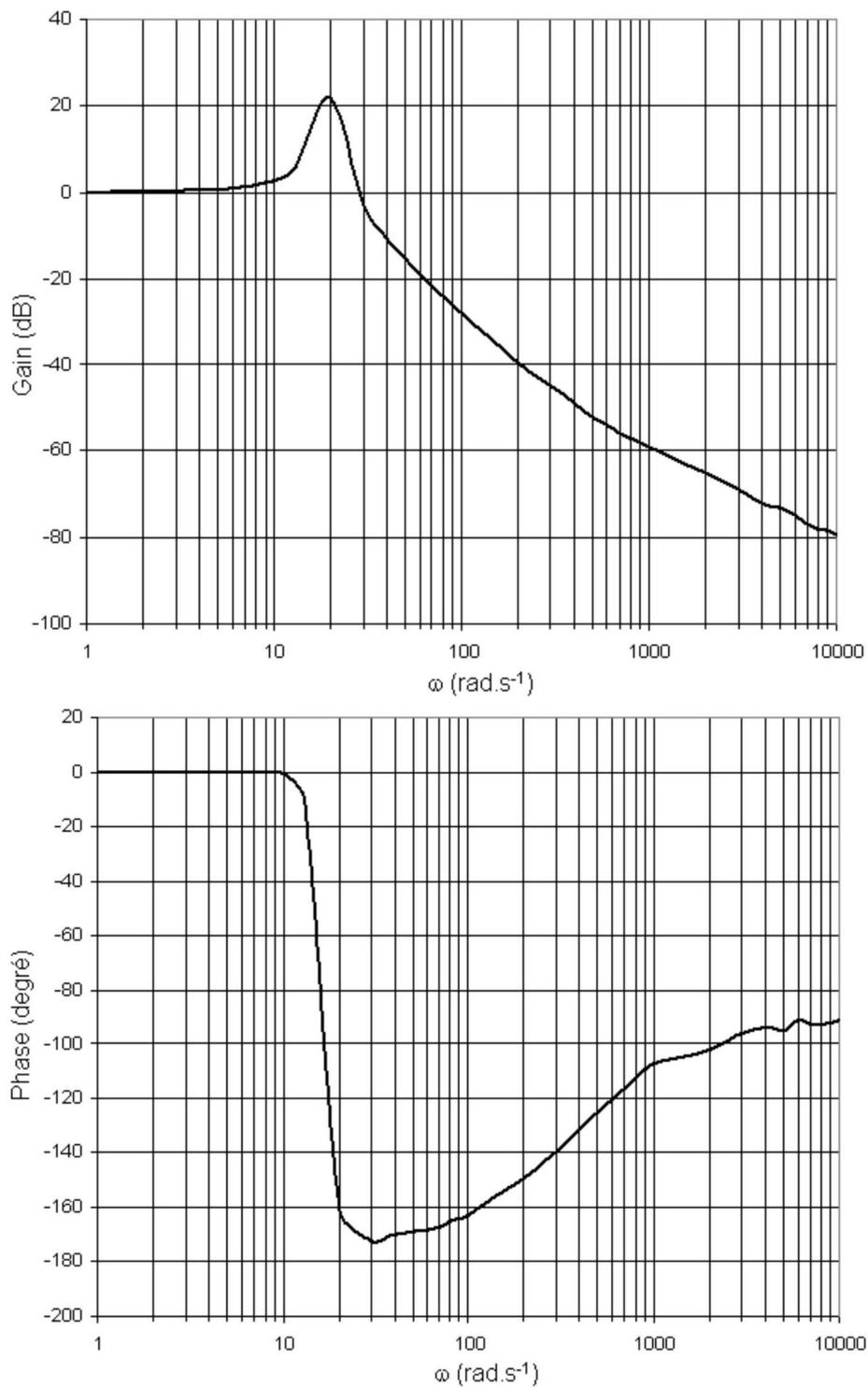
$$\omega \simeq 19,4 \text{ rad/s}$$

La fréquence est alors

$$f \simeq 3,1 \text{ Hz}$$

**Question 14** Faire l'application numérique et conclure vis-à-vis du cahier des charges.

Le cahier des charges est toujours validé.

FIGURE 25 – Diagrammes de Bode associés à la fonction  $H(p)$  pour  $V = 130$  km/h