Préparation à l'interrogation n°03

1 Croissances comparées

Soient α, $\beta > 0$. On a

$$\frac{e^{\alpha x}}{x^\beta} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty \qquad x^\beta e^{-\alpha x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \qquad x^\alpha \ln(x)^\beta \xrightarrow[x\to 0]{} 0 \qquad \frac{\ln(x)^\beta}{x^\alpha} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

2 Formules

1. Formule de Taylor reste intégral ;
2. Équivalent de Stirling.

3 Dérivation

Imparité (penser à l'expression conjuguée) et dérivée de la fonction

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2+1})$$

4 Trigonométrie

1. $\sin(p) - \sin(q) = 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$
2. $\sin(t)^2 = \frac{1-\cos(2t)}{2}$

5 Calcul intégral

1. $\int^x \frac{dt}{\cos(t)^2} = \tan(t)$
2. $\int^x \frac{dt}{\mathrm{ch}\,(t)^2} = \mathrm{th}\,(t)$
3. $\int^x \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{(1-\alpha)t^{\alpha-1}}$ si $\alpha \neq 1$

6 Exercice type

Soit n entier. Déterminer le reste de la division euclidienne X^n par $(X-a)(X-b)$ avec a, b réels distincts.

Corrigé : D'après le théorème de la division euclidienne, il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{R}[X]^2$ tel que

$$X^n = (X-a)(X-b)Q + R \tag{$*$}$$

avec $\deg R < 2$, autrement dit $R = \alpha X + \beta$ avec α, β réels. En substituant X par a puis par b dans $(*)$, on obtient

$$\begin{cases} a^n = \alpha a + \beta \\ b^n = \alpha b + \beta \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = \dfrac{a^n - b^n}{a-b} \\ \beta = \dfrac{ab^n - ba^n}{a-b} \end{cases}$$

Ainsi

$$\boxed{\text{Si } a \neq b, \text{ on a } R = \frac{1}{a-b}\left((a^n - b^n)X + ab^n - ba^n\right)}$$

7 Exercice type - Intégrales de Wallis

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $$\mathrm{I}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^n \, \mathrm{d}t$$

1. Établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n-2} pour tout $n \geqslant 2$.
2. Donner une expression de I_n à l'aide de factorielles en distinguant selon la parité de n.
3. Étudier la monotonie de la suite $(\mathrm{I}_n)_n$.
4. En considérant la suite $(n\mathrm{I}_n\mathrm{I}_{n-1})_{n\geqslant 1}$, déterminer un équivalent de I_n pour $n \to +\infty$.

Corrigé : 1. En intégrant par parties, il vient

$$\mathrm{I}_n = [-\cos(t)\sin(t)^{n-1}]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^{n-2}\cos(t)^2 \, \mathrm{d}t = (n-1)(\mathrm{I}_{n-2} - \mathrm{I}_n)$$

Ainsi $$\boxed{\forall n \geqslant 2 \qquad n\mathrm{I}_n = (n-1)\mathrm{I}_{n-2}}$$

2. On a $\mathrm{I}_n > 0$ pour tout n entier puisque $t \mapsto \sin(t)^n$ est continue positive non nulle. Soit n entier. On a le produit téléscopique

$$\mathrm{I}_{2n} = \mathrm{I}_0 \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{\mathrm{I}_{2k}}{\mathrm{I}_{2(k-1)}}\right) = \mathrm{I}_0 \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} = \mathrm{I}_0 \prod_{k=1}^{n} \frac{(2k-1)2k}{(2k)^2} = \mathrm{I}_0 \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}$$

et $$\mathrm{I}_{2n+1} = \mathrm{I}_1 \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{\mathrm{I}_{2k+1}}{\mathrm{I}_{2k-1}}\right) = \mathrm{I}_1 \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{2k}{2k+1}\right) = \mathrm{I}_1 \prod_{k=1}^{n} \frac{(2k)^2}{2k(2k+1)} = \mathrm{I}_1 \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$$

Avec $\mathrm{I}_0 = \pi/2$ et $\mathrm{I}_1 = 1$, on conclut

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{I}_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{I}_{2n+1} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}}$$

3. La suite $(\mathrm{I}_n)_n$ est clairement décroissante.
4. En multipliant la relation établie à la première question par I_{n-1}, on trouve

$$\forall n \geqslant 2 \qquad n\mathrm{I}_n\mathrm{I}_{n-1} = (n-1)\mathrm{I}_{n-1}\mathrm{I}_{n-2}$$

ce qui prouve que la suite est constante. Par suite

$$\forall n \geqslant 1 \qquad n\mathrm{I}_n\mathrm{I}_{n-1} = \mathrm{I}_1\mathrm{I}_0 = \frac{\pi}{2}$$

Par décroissance et positivité de $(\mathrm{I}_n)_n$, il vient

$$n\mathrm{I}_{n+1}\mathrm{I}_n = (n+1)\mathrm{I}_{n+1}\mathrm{I}_n \times \frac{n}{n+1} \leqslant n\mathrm{I}_n^2 \leqslant n\mathrm{I}_n\mathrm{I}_{n-1}$$

Par encadrement $$\boxed{\mathrm{I}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}}$$

Remarque : L'intégrale I_n est communément appelée *intégrale de Wallis*.

8 Questions de cours

Séries numériques, convexité, graphes usuels.