Devoir en temps libre n°3

Problème I

Soit $(u_n)_n$ une suite de réels non nuls. On note

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{P}_n = \prod_{k=0}^{n} u_k$$

On dit que le *produit infini* $\prod u_n$ *converge* si la suite $(\mathrm{P}_n)_n$ admet une limite finie non nulle.

1. Montrer que si $\prod u_n$ converge, alors $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$.
2. On suppose que $(u_n)_n$ est une suite de réels positifs. Montrer

$$\prod(1+u_n) \text{ converge} \iff \sum u_n \text{ converge}$$

3. On suppose que $(u_n)_n$ est une suite à valeurs dans $[\,0\,;1\,[$. Montrer

$$\prod(1-u_n) \text{ converge} \iff \sum u_n \text{ converge}$$

Problème II

On pose
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{R}_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$$

1. Justifier que pour n entier, le reste R_n d'ordre n est bien défini.
2. Montrer la convergence puis calculer la somme de la série $\sum \mathrm{R}_n$.

Problème III

On pose
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$$

1. Justifier l'existence d'une constante γ réelle telle que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \mathrm{o}(1)$$

2. En considérant la série téléscopique $\sum\limits_{n\geqslant 2} [v_n - v_{n-1}]$, établir

$$v_n = \gamma + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)$$

3. En déduire la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$.