CONVEXITÉ

B. Landelle

Table des matières

Rappels

On rappelle que le corps $\mathbb{R}$ vérifie la propriété de la borne supérieure et inférieure. Soit A partie non vide de $\mathbb{R}$. Si A est majorée, elle possède une borne supérieure M caractérisée par

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists a \in \mathrm{A} \quad | \quad \mathrm{M} - \varepsilon < a \leqslant \mathrm{M}$$

Si A est minorée, elle possède une borne inférieure m caractérisée par

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists a \in \mathrm{A} \quad | \quad m \leqslant a < m + \varepsilon$$

I Parties convexes d'un espace vectoriel

Dans ce qui suit, l'ensemble E désigne un $\mathbb{R}$-ev.

1 Définitions

Définition 1. *Soit* X *partie non vide de* E. *On appelle* combinaison convexe *d'éléments de* X *tout élément de la forme* $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ *avec n entier non nul,* $(x_i)_{i \in [\![1\,;n]\!]} \in \mathrm{X}^n$ *et* $(\lambda_i)_{i \in [\![1\,;n]\!]} \in \mathbb{R}_+^n$ *tel que* $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$.

Remarque : Pour a, b réels avec $a < b$ et $x \in [\,a\,;b\,]$, on a

$$x = \lambda a + (1-\lambda) b \quad \text{avec} \quad \lambda = \frac{b-x}{b-a} \in [\,0\,;1\,]$$

ce qui prouve que tout élément de $[\,a\,;b\,]$ est combinaison convexe de $[\,a\,;b\,]$. Réciproquement, pour $\lambda \in [\,0\,;1\,]$, on a

$$\lambda a + (1-\lambda) b = b - \lambda(b-a) \in [\,a\,;b\,]$$

d'où
$$[\,a\,;b\,] = \{\lambda a + (1-\lambda) b, \lambda \in [\,0\,;1\,]\}$$

On étend alors la notion de *segment* dans un $\mathbb{R}$-ev quelconque.

Définition 2. *Soit* $(a, b) \in \mathrm{E}^2$. *On appelle* segment *d'extrémités a et b l'ensemble noté* $[\,a\,;b\,]$ *défini par*

$$[\,a\,;b\,] = \{\lambda a + (1-\lambda) b, \lambda \in [\,0\,;1\,]\}$$

Remarque : Dans $\mathbb{R}$, on maintient l'usage d'une notation ordonnée.

Définition 3. *Une partie* X *de* E *est dite* convexe *si*

$$\forall (a, b) \in \mathrm{X}^2 \qquad [\,a\,;b\,] \subset \mathrm{X}$$

FIGURE 1 – Une partie convexe et une partie non convexe

2 Propriétés

Théorème 1. *Les parties convexes de $\mathbb{R}$ sont exactement les intervalles de $\mathbb{R}$.*

Démonstration. Soit I intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et $(a,b) \in \mathrm{I}^2$. Si $a \leqslant b$, on a $[\,a\,;b\,] \subset \mathrm{I}$ et $[\,b\,;a\,] \subset \mathrm{I}$ sinon d'où la convexité de I. Réciproquement, soit I une partie convexe de $\mathbb{R}$. Si I est vide ou réduit à un singleton, c'est trivial. Sinon, il faut distinguer si I est majoré ou pas puis I minoré ou pas. Supposons I majoré et minoré et posons $a = \operatorname{Inf} \mathrm{I}$ et $b = \operatorname{Sup} \mathrm{I}$. On a $\mathrm{I} \subset [\,a\,;b\,]$. Soit $x \in \,]\,a\,;b\,[$. Par caractérisation de la borne inférieure et de la borne supérieure, il existe $\alpha \in \mathrm{I}$ tel que $\alpha < x$ et $\beta \in \mathrm{I}$ tel que $x < \beta$. Ainsi, on a $x \in [\,\alpha\,;\beta\,]$ et $[\,\alpha\,;\beta\,] \subset \mathrm{I}$ par convexité d'où $x \in \mathrm{I}$. Ceci prouve que $]\,a\,;b\,[\,\subset \mathrm{I}$ et comme $\mathrm{I} \subset [\,a\,;b\,]$, c'est un intervalle. Supposons I minoré, non majoré et posons $a = \operatorname{Inf} \mathrm{I}$. Soit $x \in \,]\,a\,;+\infty\,[$. Par caractérisation de la borne inférieure, il existe $\alpha \in \mathrm{I}$ tel que $\alpha < x$ et comme l'intervalle I est non majoré, on dispose de $\beta \in \mathrm{I}$ tel que $\beta > x$. Ainsi, on a $x \in [\,\alpha\,;\beta\,]$ et $[\,\alpha\,;\beta\,] \subset \mathrm{I}$ par convexité d'où $x \in \mathrm{I}$. Ceci prouve $]\,a\,;+\infty\,[\,\subset \mathrm{I}$ et comme $\mathrm{I} \subset [\,a\,;+\infty\,[$, c'est un intervalle. Les autres cas se traitent de manière analogue. □

Théorème 2. *Soit* X *une partie de* E*. On a équivalence entre :*

1. X *est une partie convexe ;*
2. X *est stable par combinaison convexe.*

Démonstration. Si $\mathrm{X} = \varnothing$, les deux assertions sont vraies donc équivalentes. Dans ce qui suit, on considère X non vide. Supposons X convexe. On procède par récurrence. On note

$$\mathscr{P}(n) : \mathrm{X} \text{ stable par combinaison convexe à } n \text{ éléments}$$

L'initialisation pour $n = 1$ est immédiate. On suppose $\mathscr{P}(n)$ vraie pour n entier fixé. Soit $(x_i, \lambda_i)_{i \in [\![1\,;n+1]\!]} \in \mathrm{X}^{n+1} \times \mathbb{R}_+^{n+1}$ avec $\sum\limits_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$. On suppose $\lambda_{n+1} < 1$ sinon le résultat est trivial. Par hypothèse de récurrence, on a

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{n+1}} x_i \in \mathrm{X}$$

et par suite
$$(1-\lambda_{n+1}) \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{n+1}} x_i + \lambda_{n+1} x_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i \in \mathrm{X}$$

ce qui prouve $(1) \Longrightarrow (2)$. L'implication $(2) \Longrightarrow (1)$ est immédiate. □

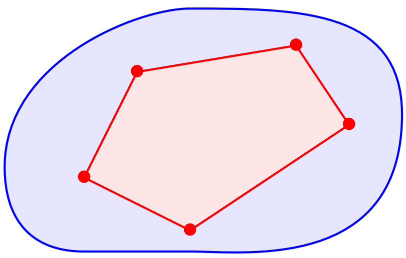


Figure 2 – Combinaisons convexes d'une famille vecteurs de X

II Fonctions convexes d'une variable réelle

Dans ce qui suit, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide, non réduit à un point.

1 Définition

Définition 4. *Une fonction* $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ *est dite* convexe *si*

$$\forall (a,b) \in \mathrm{I}^2 \qquad \forall \lambda \in [\,0\,;1\,] \qquad f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leqslant \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)$$

Remarque : On peut se contenter de la propriété pour $(a,b) \in \mathrm{I}^2$ avec $a < b$.

Exemples : 1. Les fonctions affines $x \mapsto mx + p$ avec m, p réels sont convexes.
2. La fonction $|\cdot|$ est convexe. Soient a, b réels et $\lambda \in [\,0\,;1\,]$. Par inégalité triangulaire, on a

$$|\lambda a + (1-\lambda)b| \leqslant \lambda\,|a| + (1-\lambda)\,|b|$$

Définition 5. *Une fonction* $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ *est dite* concave *si*

$$\forall (a,b) \in \mathrm{I}^2 \qquad \forall \lambda \in [\,0\,;1\,] \qquad f(\lambda a + (1-\lambda)b) \geqslant \lambda f(a) + (1 - \lambda f(b)$$

Proposition 1. *Soit* $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$*. On a*

$$f \text{ concave} \iff -f \text{ convexe}$$

Démonstration. Immédiate. ☐

Définition 6. *Soit* $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$*. Le* graphe *de la fonction* f *est l'ensemble*

$$\Gamma_f = \{(x,y) \in \mathrm{I} \times \mathbb{R} \mid y = f(x)\}$$

*L'*épigraphe *d'une fonction* f *est l'ensemble*

$$\Gamma_f^+ = \{(x,y) \in \mathrm{I} \times \mathbb{R} \mid f(x) \leqslant y\}$$

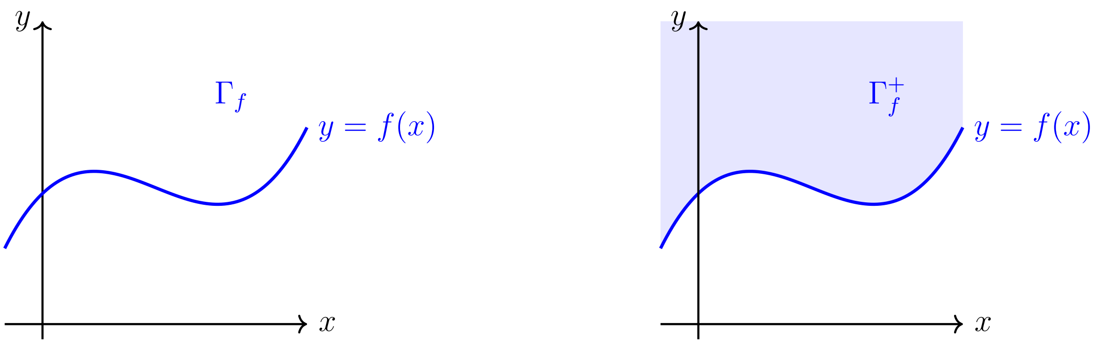


FIGURE 3 – Graphe et épigraphe de f

Définition 7. *Soit* $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$*. On appelle* corde *de* f *tout segment d'extrémités des points du graphe de* f*.*

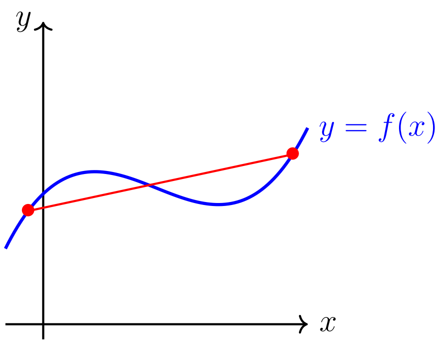


FIGURE 4 – Une corde de f

Définition 8. *Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$, $a, b \in \mathrm{I}$ avec $a \neq b$. On note $\tau(a, b)$ le* taux d'accroissement *de f entre a et b défini par*

$$\tau(a, b) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Proposition 2. *Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ et $(a, b) \in \mathrm{I}^2$ avec $a \neq b$. La corde de f prise entre a et b a pour équation :*

$$y = \tau(a, b)(x - a) + f(a)$$

Démonstration. La corde a pour équation

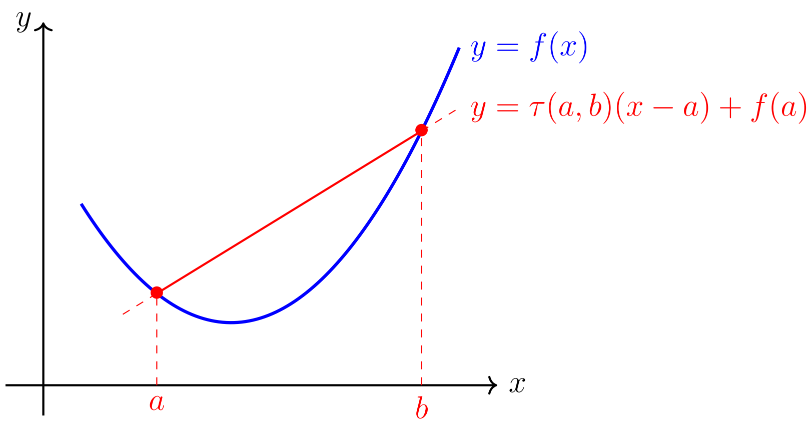
$$\begin{vmatrix} x - a & b - a \\ y - f(a) & f(b) - f(a) \end{vmatrix} = 0 \iff y = \tau(a, b)(x - a) + f(a)$$

On peut aussi l'obtenir avec

$$\frac{y - f(a)}{x - a} = \tau(a, b) \iff y = \tau(a, b)(x - a) + f(a)$$

□

Proposition 3. *Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$. On a f convexe si et seulement si toute corde prise entre a et b avec $a < b$ est au dessus du graphe de f sur le segment $[\,a\,; b\,]$.*



Proposition 4. *Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$. On a f concave si et seulement si toute corde prise entre a et b avec $a < b$ est au dessous du graphe de f sur le segment $[\,a\,; b\,]$.*

Tous les résultats qui suivent sont énoncés pour une fonction convexe. Pour une fonction concave, on se ramène à cette situation en considérant l'opposé de la fonction.

Théorème 3. *Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$. On a équivalence entre :*

1. *la fonction f est convexe ;*
2. *l'épigraphe de f est convexe.*

Démonstration. Supposons (1). Soient $(a, b), (c, d)$ dans Γ_f^+ et $\lambda \in [\,0\,;1\,]$. On doit montrer que le point $\lambda(a, b) + (1 - \lambda)(c, d) \in \Gamma_f^+$. Comme I est un intervalle, on a $\lambda a + (1 - \lambda)c \in \mathrm{I}$. Par convexité puis choix de (a, b) et (c, d), il vient

$$f(\lambda a + (1 - \lambda)c) \leqslant \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(c) \leqslant \lambda b + (1 - \lambda)d$$

ce qui prouve que $\lambda(a, b)+(1-\lambda)(c, d) \in \Gamma_f^+$. Réciproquement, supposons que Γ_f^+ est une partie convexe. Soit $(a, b) \in \mathrm{I}^2$. Les points $(a, f(a))$ et $(b, f(f))$ appartiennent à Γ_f^+ et pour $\lambda \in [\,0\,;1\,]$, on a

$$\lambda(a, f(a)) + (1 - \lambda)(b, f(b)) \in \Gamma_f^+ \quad \Longrightarrow \quad f(\lambda a + (1 - \lambda)b) \leqslant \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b)$$

□

2 Inégalité de Jensen

Théorème 4. *Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ convexe, n entier non nul, $(x_i)_{i\in[\![1\,;\,n]\!]} \in \mathrm{I}^n$ et $(\lambda_i)_{i\in[\![1\,;\,n]\!]} \in \mathbb{R}_+^n$ tel que $\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i = 1$. On a*

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i)$$

Démonstration. On a $(x_i, f(x_i))_{i\in[\![1\,;\,n]\!]} \in {\Gamma_f^+}^n$. Comme Γ_f^+ est une partie convexe, on a que toute combinaison convexe de points dans l'épigraphe est encore dans l'épigraphe et l'équivalence qui suit

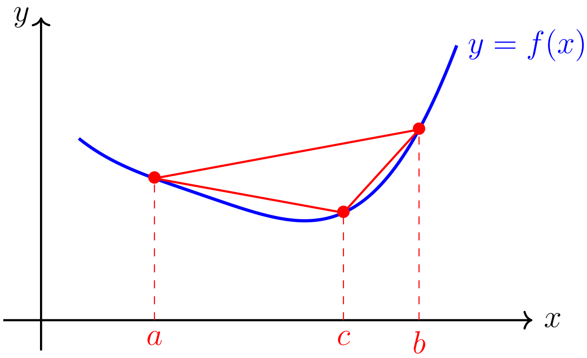
$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x_i, f(x_i)) \in \Gamma_f^+ \iff f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i)$$

prouve le résultat. □

3 Inégalité des pentes

Théorème 5 (Inégalité des pentes). *Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$. On a équivalence entre :*

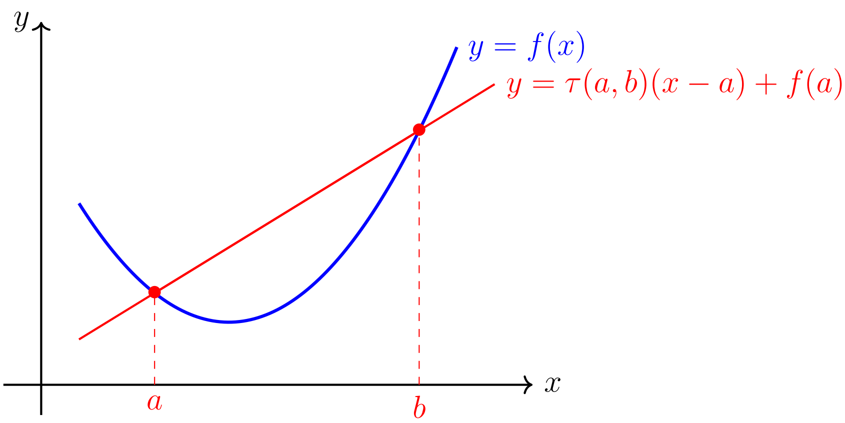
1. *la fonction f est convexe ;*
2. $\forall (a, b, c) \in \mathrm{I}^3 \qquad a < c < b \quad \Longrightarrow \quad \tau(a, c) \leqslant \tau(a, b) \leqslant \tau(c, b)$
3. $\forall (a, b, c) \in \mathrm{I}^3 \qquad a < c < b \quad \Longrightarrow \quad \tau(a, c) \leqslant \tau(c, b)$



Corollaire 1. *Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$. On a équivalence entre :*

1. *la fonction f est convexe ;*
2. *$x \mapsto \tau(a, x)$ est croissante sur $\mathrm{I} \setminus \{a\}$ pour tout $a \in \mathrm{I}$.*

Remarque : Soit $a \in \mathrm{I}$. La croissance de $x \mapsto \tau(a, x)$ donne la position complète du graphe d'une fonction convexe par rapport à une de ses cordes : en dessous sur le segment d'appui de la corde et au dessus ailleurs.



On pose

$$\forall x \in \mathrm{I} \setminus \{a\} \qquad \Delta(x) = f(x) - (\tau(a, b)(x - a) + f(a)) = (x - a)\,[\tau(a, x) - \tau(a, b)]$$

Le signe s'en déduit et la position relative de la corde vis-à-vis du graphe également.

Commentaire : Il n'est pas complètement clair que ce résultat soit considéré au programme. Pour l'invoquer, on précisera qu'il est conséquence immédiate de l'inégalité des pentes.

III Fonctions convexes dérivables, deux fois dérivables

Dans ce qui suit, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide, non réduit à un point.

1 Caractérisation

Théorème 6. *Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ dérivable. On a*

$$f \text{ convexe} \iff f' \text{ croissante}$$

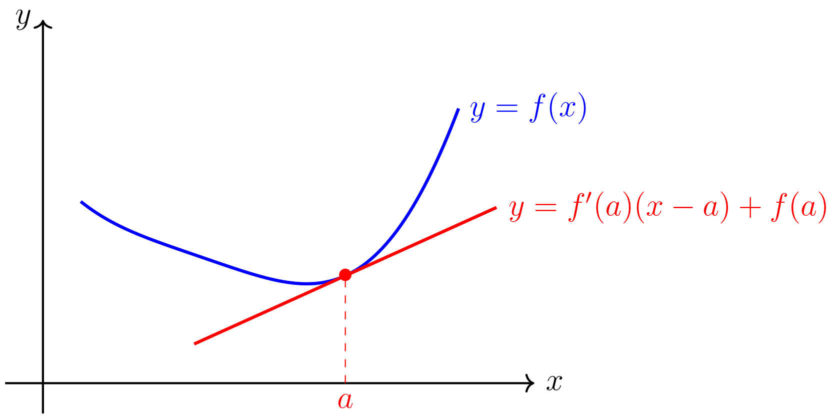
Corollaire 2. *Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable. On a*

$$f \text{ convexe} \iff f'' \geqslant 0$$

Exemples : Les fonctions $x \mapsto x^2$, $x \mapsto \mathrm{e}^x$, $x \mapsto \mathrm{ch}\,(x)$ sont convexes sur $\mathbb{R}$.
La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est convexe sur $]\,0\,;+\infty\,[$.
La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est concave sur $[\,0\,;+\infty\,[$, la fonction $x \mapsto \ln(x)$ est concave sur $]\,0\,;+\infty\,[$, la fonction $x \mapsto \sin(x)$ est concave sur $[\,0\,;\pi\,]$.

Pour la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$, on a la concavité sur $]\,0\,;+\infty\,[$ et on étend sans difficulté en zéro.

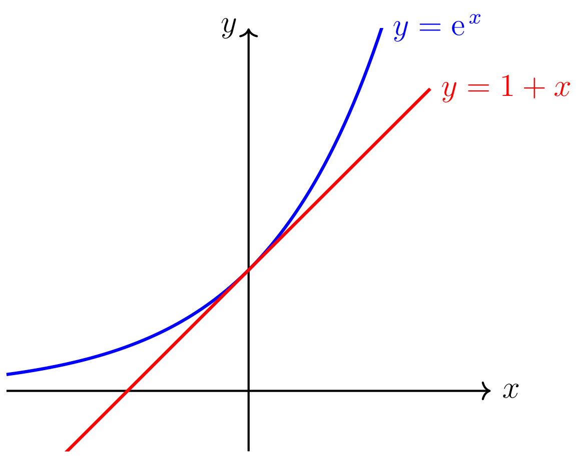
Théorème 7. *Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ dérivable. La fonction f est convexe si et seulement si le graphe de f est au dessus de ses tangentes.*

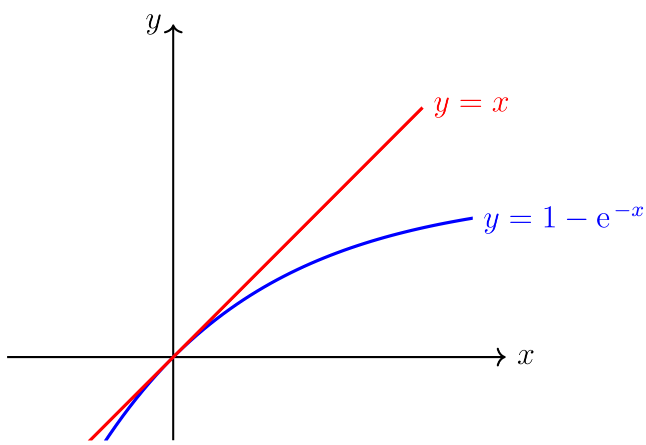


2 Exemples d'inégalités de convexité/concavité

Proposition 5. *On a* $\qquad \forall x \in \mathbb{R} \qquad 1 + x \leqslant \mathrm{e}^x \qquad 1 - \mathrm{e}^{-x} \leqslant x$

Démonstration. Position graphe/tangente. $\square$



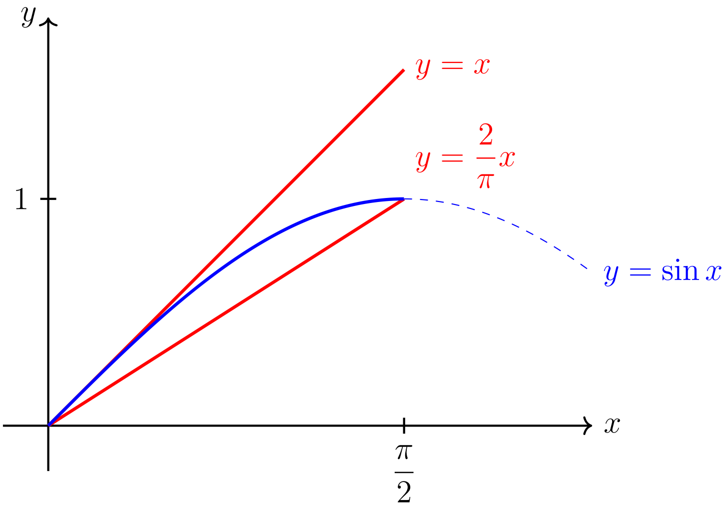


Proposition 6. *On a* $\qquad \forall x > 0 \qquad \ln(x) \leqslant x - 1 \qquad \forall x > -1 \qquad \ln(1+x) \leqslant x$

Démonstration. Position graphe/tangente. □

Proposition 7. *On a* $\forall x \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right] \qquad \frac{2}{\pi}x \leqslant \sin(x) \leqslant x$

Démonstration. Position graphe/tangente et graphe/corde. □



Proposition 8 (Inégalité arithmético-géométrique). *Soient $x_1, \ldots, x_n$ des réels positifs. On a*

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

⚠ **Remarque :** à redémontrer en cas de besoin.

Démonstration. L'inégalité est triviale si un des x_i est nul. Sinon, par concavité du ln, il vient d'après l'inégalité de Jensen

$$\ln\left(\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) \leqslant \ln\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$$

Passant à l'exponentielle, le résultat suit. □