Devoir surveillé n°1 - 3h

Le but de ce sujet est de calculer, pour p entier, *l'intégrale de Dirichlet généralisée*

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)^{2p+1}}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

et d'utiliser ce calcul pour évaluer une espérance.

I Calcul d'une intégrale

Dans ce qui suit, on a $x \in \left]0\,;1\right[$ fixé.

1 . Montrer que pour tout $\theta \in \left]-\pi\,;\pi\right[$, la fonction

$$f\colon \begin{cases} \left]0\,;+\infty\right[\longrightarrow \mathbb{C} \\ \quad t \longmapsto \dfrac{t^{x-1}}{1+t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} \end{cases}$$

est définie et intégrable sur $\left]0\,;+\infty\right[$.

On pose

$$r\colon \begin{cases} \left]-\pi\,;\pi\right[\longrightarrow \mathbb{C} \\ \quad \theta \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\,\mathrm{d}t \end{cases}$$

2 . Montrer que la fonction r est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left]-\pi\,;\pi\right[$ et que

$$\forall \theta \in \left]-\pi\,;\pi\right[\qquad r'(\theta) = -\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\int_0^{+\infty} \frac{t^x}{(1+t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^2}\,\mathrm{d}t$$

Indication : Soit $\beta \in \left]0\,;\pi\right[$, montrer que pour tout $\theta \in [-\beta\,;\beta]$ et $t>0$, on a

$$\left|1+t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right|^2 \geqslant \left|1+t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}\right|^2 = (t+\cos(\beta))^2 + \sin(\beta)^2$$

On pose

$$g\colon \begin{cases} \left]-\pi\,;\pi\right[\longrightarrow \mathbb{C} \\ \quad \theta \longmapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\theta}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\,\mathrm{d}t \end{cases}$$

3 . Montrer que la fonction g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left]-\pi\,;\pi\right[$ et que, pour tout $\theta \in \left]-\pi\,;\pi\right[$, on a

$$g'(\theta) = \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\theta}\int_0^{+\infty} h'(t)\,\mathrm{d}t$$

avec

$$h\colon \begin{cases} \left]0\,;+\infty\right[\longrightarrow \mathbb{C} \\ \quad t \longmapsto \dfrac{t^{x}}{1+t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} \end{cases}$$

Calculer

$$\lim_{t\to 0^+} h(t) \quad \text{et} \quad \lim_{t\to+\infty} h(t)$$

En déduire que la fonction g est constante sur $\left]-\pi\,;\pi\right[$.

4 . Montrer que pour tout $\theta \in]\,0\,;\pi\,[$

$$g(\theta)\sin(x\theta) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(g(-\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\theta} - g(\theta)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\theta}\right) = \sin(\theta)\int_0^{+\infty} \frac{t^x}{t^2+2t\cos(\theta)+1}\,\mathrm{d}t$$

5. En déduire $\quad \forall \theta \in]\,0\,;\pi\,[\qquad g(\theta)\sin(\theta x) = \displaystyle\int_{\operatorname{cotan}(\theta)}^{+\infty} \frac{(u\sin(\theta)-\cos(\theta))^x}{1+u^2}\,\mathrm{d}u$

où $\operatorname{cotan}(\theta) = \dfrac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$.

6 . Montrer en utilisant le théorème de convergence dominée

$$g(\theta)\sin(x\theta) \xrightarrow[\theta\to\pi^-]{} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$$

7. En déduire
$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$$

II Une expression utile de la fonction sinus

On rappelle que x est un élément fixé de $]\,0\,;1\,[$.

8. Montrer
$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \left(\frac{t^{x-1}}{1+t} + \frac{t^{-x}}{1+t}\right)\,\mathrm{d}t$$

9. Montrer
$$\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+x}$$

10. Établir l'identité
$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1-x}$$

11. En déduire
$$\frac{\pi}{\sin(\pi x)} = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n x}{n^2-x^2}$$

12. En déduire $\qquad \forall y \in]\,0\,;\pi\,[\qquad \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n y\sin(y)}{y^2-n^2\pi^2} = 1 - \frac{\sin(y)}{y}$

III Calcul d'une intégrale de Dirichlet généralisée

13 . Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)^{2p+1}}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge et qu'on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)^{2p+1}}{t^2}\,\mathrm{d}t = (2p+1)\int_0^{+\infty} \cos(t)^{2p}\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

14 . Montrer que pour tout n entier non nul, on a

$$\int_{\frac{\pi}{2}+(n-1)\pi}^{\frac{\pi}{2}+n\pi} \cos(t)^{2p}\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^{2p}\frac{2(-1)^n t\sin(t)}{t^2-n^2\pi^2}\,\mathrm{d}t$$

15. En déduire
$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \cos(t)^{2p}\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^{2p}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2(-1)^n t\sin(t)}{t^2-n^2\pi^2}\,\mathrm{d}t$$

16. En déduire $$\int_0^{+\infty} \cos(t)^{2p} \frac{\sin(t)}{t} \, \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^{2p} \, \mathrm{d}t$$

Dans le cas $p = 0$, cette intégrale est communément appelée *intégrale de Dirichlet.*

17. Montrer $$\cos(t)^{2p} = \frac{1}{2^{2p}} \left(\binom{2p}{p} + 2 \sum_{k=0}^{p-1} \binom{2p}{k} \cos(2(p-k)t) \right)$$

Indication : On pourra développer $\left(\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{2} \right)^{2p}$.

18. En déduire $$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)^{2p+1}}{t^2} \, \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} \frac{(2p+1)!}{2^{2p}(p!)^2}$$

IV Calcul de $\mathbb{E}(|\mathrm{S}_n|)$

Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, un entier $\mathrm{N} \geqslant 2$ et $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_\mathrm{N}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. On note $\mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{X}_k$ pour $n \in [\![1\,;\, \mathrm{N}]\!]$.

19 . Soit $n \in [\![1\,;\, \mathrm{N}]\!]$. Calculer $\mathbb{E}(\mathrm{S}_n)$ et $\mathbb{V}(\mathrm{S}_n)$.

Soient S et T deux variables aléatoires indépendantes. On suppose que T et $-\mathrm{T}$ suivent la même loi.

20. Montrer $$\mathbb{E}(\cos(\mathrm{S} + \mathrm{T})) = \mathbb{E}(\cos(\mathrm{S}))\mathbb{E}(\cos(\mathrm{T}))$$

21 . En déduire que pour t réel, on a

$$\forall n \in [\![1\,;\, \mathrm{N}]\!] \qquad \mathbb{E}(\cos(t\mathrm{S}_n)) = \cos(t)^n$$

22 . Soient a, b réels tels que $a \neq 0$ et $|b| \leqslant |a|$. Montrer

$$|a + b| = |a| + \mathrm{signe}(a)\, b$$

où $\mathrm{signe}(x) = x / |x|$ pour x réel non nul. En déduire que pour tout n entier non nul tel que $2n \leqslant \mathrm{N}$, on a

$$\mathbb{E}(|\mathrm{S}_{2n}|) = \mathbb{E}(|\mathrm{S}_{2n-1}|)$$

23. Montrer $$\forall s \in \mathbb{R} \qquad \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(st)}{t^2} \, \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} |s|$$

24. En déduire $$\forall n \in [\![1\,;\, \mathrm{N}]\!] \qquad \mathbb{E}(|\mathrm{S}_n|) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)^n}{t^2} \, \mathrm{d}t$$

25 . Conclure en montrant pour n entier non nul tel que $2n \leqslant \mathrm{N}$

$$\mathbb{E}(|\mathrm{S}_{2n}|) = \mathbb{E}(|\mathrm{S}_{2n-1}|) = \frac{(2n-1)!}{2^{2n-2}((n-1)!)^2}$$