ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Feuille d'exercices n°03

Exercice 1 (***)

Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et a réel. On suppose que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{d}t$ convergente. Montrer que pour tout $x \geqslant a$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$ converge.

Indications : Poser $\mathrm{F} : y \mapsto \displaystyle\int_0^{y} f(t)\mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{d}t$ puis considérer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{F}(t)\mathrm{e}^{-\delta t}\,\mathrm{d}t$ avec $\delta = x - a > 0$.

Exercice 2 (****)

Soit $f \in \mathscr{C}^0([\,0\,;+\infty\,[\,, \mathbb{R})$ intégrable.

1. On suppose f uniformément continue. Montrer $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.
2. On suppose désormais f de classe $\mathscr{C}^1$ et $x \mapsto \displaystyle\int_x^{x+1} f'(t)^2\mathrm{d}t$ bornée. Montrer $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

Indications : 1. Pour $x \geqslant 0$, majorer $|f(x)|$ en intégrant f sur un intervalle suffisamment petit.
2. Pour $y \geqslant x$, écrire $f(y) - f(x)$ comme une intégrale puis utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz et ensuite la relation de Chasles.

Exercice 3 (***)

On note $$\mathrm{I} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \mathrm{J} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(t))\,\mathrm{d}t$$

1. Justifier la convergence de I et J et établir l'égalité $\mathrm{I} = \mathrm{J}$.
2. En déduire la valeur de I et J.

Indications : 1. Établir que $\ln(\sin(t)) \underset{t\to 0}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)$ puis utiliser le changement de variables $t = \dfrac{\pi}{2} - u$.
2. Calculer $\mathrm{I} + \mathrm{J}$ puis utiliser des transformations trigonométriques.

Exercice 4 (***)

On pose $$\forall x > 0 \qquad \mathrm{F}(x) = \int_x^{+\infty} \frac{1 + \sin(t^2)}{t^2}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \mathrm{G}(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$$

1. Justifier que F et G sont bien définies.
2. Montrer $\mathrm{F}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \mathrm{G}(x)$. Les intégrandes sont-ils également équivalents en $+\infty$?

Indications : 2. Procéder par intégration par parties pour $\mathrm{F}(x)$.

Exercice 5 (****)

Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que f^2 intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On pose $g(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ pour $x > 0$.

1. Montrer que g se prolonge par continuité en 0.
2. Montrer que g^2 est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et que

$$\int_0^{+\infty} g^2(t)\,\mathrm{d}t \leqslant 4\int_0^{+\infty} f^2(t)\,\mathrm{d}t$$

Indications : 1. Notant $\mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ pour $x \geqslant 0$, reconnaître un taux d'accroissement.
2. En intégrant par partie, déterminer une primitive de g^2 en fonction de F. En déduire que pour $a \geqslant 0$, on a $\displaystyle\int_0^a g^2(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 2\int_0^a g(x)f(x)\,\mathrm{d}x$ puis exploiter l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exercice 6 (***)

On pose $\qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\,\mathrm{d}t, \qquad \mathrm{J}_n = \int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$

1. Montrer la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$
2. Justifier que I_n et J_n sont bien définies pour tout n entier.
3. Pour n entier, calculer $\mathrm{I}_{n+1} - \mathrm{I}_n$ puis en déduire la valeur de I_n pour tout n entier.
4. Soit $f \in \mathscr{C}^1([\,0\,;\pi\,], \mathbb{R})$. Montrer que
$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{\pi} f(t)\sin\left((n+\tfrac{1}{2})t\right)\,\mathrm{d}t = 0$$
5. On pose $f(t) = \dfrac{1}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \dfrac{2}{t}$ pour $t \in \,]\,0\,;\pi\,]$ et $f(0) = 0$. Montrer que $f \in \mathscr{C}^1([\,0\,;\pi\,], \mathbb{R})$.
6. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

Indications : 1. Utiliser le théorème d'intégration par parties en considérant une primitive de $t \mapsto \sin t$ qui s'annule en 0.
2. Utiliser l'équivalent usuel $\sin(u) \underset{u \to 0}{\sim} u$.
3. Pour $(p, q) \in \mathbb{R}^2$, déterminer une expression de $\sin(p) - \sin(q)$ sous forme de produit.
4. Intégrer par parties.
5. Appliquer le théorème de limite de la dérivée.

Exercice 7 (***)

Soit $f \in \mathscr{C}^1([\,0\,;+\infty\,[\,,]\,0\,;+\infty\,[)$ telle que

$$\frac{f'(x)}{f(x)} \xrightarrow[x \to +\infty]{} a \quad \text{avec} \quad a < 0$$

Montrer que f et f' sont intégrables sur $[\,0\,;+\infty\,[$.

Indications : Intégrer une relation de comparaison.