Feuille d'exercices n°04

Exercice 1 (*)

On pose $\qquad \forall x \geqslant 0 \qquad \mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$

1. Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$.

Corrigé : 1. On pose $\qquad \forall (x,t) \in \mathrm{X} \times \mathrm{I} \qquad f(x,t) = \dfrac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}$

avec $\mathrm{X} = \mathbb{R}_+$ et $\mathrm{I} = \mathbb{R}_+$. Vérifions les hypothèses du théorème de continuité sous l'intégrale.
• Pour $x \in \mathrm{X}$, on a $t \mapsto f(x,t) \in \mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I},\mathbb{R})$ par théorèmes généraux.
• Pour $t \in \mathrm{I}$, on a $x \mapsto f(x,t) \in \mathscr{C}^0(\mathrm{X},\mathbb{R})$ par théorèmes généraux.
• Domination : On a

$$\forall (x,t) \in \mathrm{X} \times \mathrm{I} \qquad |f(x,t)| \leqslant \varphi(t) \quad \text{avec} \quad \varphi(t) = \frac{1}{1+t^2}$$

La fonction φ est continue (par morceaux) et intégrable sur I puisque $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi(t)\mathrm{d}t = [\mathrm{Arctan}\ t]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$. Ainsi, d'après le théorème de continuité sous l'intégrale, on conclut

$$\boxed{\text{La fonction F est bien définie, continue sur } \mathbb{R}_+.}$$

2. Vérifions les hypothèses du théorème de régularité $\mathscr{C}^1$ sous l'intégrale sur le domaine $\mathrm{X}' =]\,0\,;+\infty\,[$.

• Pour $x > 0$, on a $t \mapsto f(x,t) \in \mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I},\mathbb{R})$ et intégrable d'après la domination de la question précédente.
• Pour $t \in \mathrm{I}$, on a $x \mapsto f(x,t) \in \mathscr{C}^1(\mathrm{X}',\mathbb{R})$ par théorèmes généraux. Par dérivation, on trouve

$$\forall (x,t) \in \mathrm{X}' \times \mathrm{I} \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{-t\mathrm{e}^{-tx}}{1+t^2}$$

• Pour $x > 0$, on a $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) \in \mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I},\mathbb{R})$ par théorèmes généraux.

• Domination : On a $\qquad \forall t \in \mathrm{I} \qquad \underset{x>0}{\mathrm{Sup}} \left|\dfrac{-t\mathrm{e}^{-tx}}{1+t^2}\right| = \dfrac{t}{1+t^2}$

Mais la fonction $t \mapsto \dfrac{t}{1+t^2}$ n'est pas intégrable sur I puisque $\dfrac{t}{1+t^2} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t}$ (critère de Riemann et critère des équivalents licite car signe constant). On procède à une domination locale. Pour $a > 0$, on a

$$\forall (x,t) \in [\,a\,;+\infty\,[\times \mathrm{I} \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t) \quad \text{avec} \quad \varphi(t) = \frac{t\mathrm{e}^{-at}}{1+t^2}$$

On a $\varphi \in \mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I},\mathbb{R}_+)$ et $\varphi(t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées. Par comparaison et critère de Riemann, la dominante φ est intégrable sur I et d'après le théorème de régularité $\mathscr{C}^1$ sous l'intégrale, on a $\mathrm{F} \in \mathscr{C}^1([\,a\,;+\infty\,[\,,\mathbb{R})$ et ce pour tout $a > 0$ d'où

$$\boxed{\mathrm{F} \in \mathscr{C}^1(]\,0\,;+\infty\,[\,,\mathbb{R})}$$

Exercice 2 (*)

Pour x réel, on pose $\mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ et $\mathrm{G}(x) = \left(\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2$

1. Montrer que F et G sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer $\mathrm{F}' + \mathrm{G}'$.
3. En déduire la convergence et la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

Corrigé : 1. On pose

$$\forall (x,t) \in \mathrm{X} \times \mathrm{I} \qquad f(x,t) = \frac{\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} \quad \text{et} \quad \forall t \geqslant 0 \qquad g(t) = \mathrm{e}^{-t^2}$$

avec $\mathrm{X} = \mathbb{R}$ et $\mathrm{I} = [\,0\,;1\,]$. La fonction G est le carré d'une primitive de la fonction continue g. Puis, on vérifie :
• Pour $x \in \mathrm{X}$, on a $t \mapsto f(x,t) \in \mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I},\mathbb{R})$ et intégrable sur le segment I.
• Pour $t \in \mathrm{I}$, on a $x \mapsto f(x,t) \in \mathscr{C}^1(\mathrm{X},\mathbb{R})$. Par dérivation, on trouve

$$\forall (x,t) \in \mathrm{X} \times \mathrm{I} \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -2x\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}$$

• Pour $x \in \mathrm{X}$, on a $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) \in \mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I},\mathbb{R})$.
• Domination : Soit $a > 0$. On a

$$\forall (x,t) \in [\,-a\,;a\,] \times \mathrm{I} \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant 2a$$

et $t \mapsto 2a$ est continue par morceaux et intégrable sur le segment I. La fonction F est donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\,-a\,;a\,]$ pour tout $a > 0$ et par conséquent

$$\boxed{\text{Les fonctions F et G sont de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

Remarque : On a $\qquad \forall (x,t) \in \mathrm{X} \times \mathrm{I} \qquad \left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant 2\,|x|\,\mathrm{e}^{-x^2}$

et par une étude de fonctions, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad 2\,|x|\,\mathrm{e}^{-x^2} \leqslant \sqrt{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$$

ce qui permet de faire une domination globale (luxe inutile...).

2. Par dérivation, on trouve pour x réel

$$\mathrm{F}'(x) + \mathrm{G}'(x) = -2x\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^1 \mathrm{e}^{-(xt)^2}\,\mathrm{d}t + 2\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

Le changement de variable $u = xt$ dans la première intégrale permet d'obtenir

$$\boxed{\mathrm{F}' + \mathrm{G}' = 0}$$

3. La fonction $\mathrm{F} + \mathrm{G}$ de dérivée nulle sur l'intervalle $\mathbb{R}$ est donc constante. Par conséquent

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad (\mathrm{F}+\mathrm{G})(x) = (\mathrm{F}+\mathrm{G})(0) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}$$

Par ailleurs, on a $\qquad \forall (x,t) \in \mathrm{X}\times\mathrm{I} \qquad 0 \leqslant f(x,t) \leqslant \mathrm{e}^{-x^2}$

D'où, après intégration $\qquad \forall x \in \mathrm{X} \qquad 0 \leqslant \mathrm{F}(x) \leqslant \mathrm{e}^{-x^2}$

et par encadrement $\qquad \mathrm{F}(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

Ainsi $\qquad \mathrm{G}(x) = \dfrac{\pi}{4} + \mathrm{o}(1)$

On conclut $\qquad \boxed{\text{L'intégrale } \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \text{ converge et vaut } \frac{\sqrt{\pi}}{2}.}$

Exercice 3 (*)

On pose $\qquad \forall x > 0 \qquad \mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt^2}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \Lambda = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$

1. Justifier que F est bien définie, continue sur $]\,0\,;+\infty\,[$.
2. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \mathrm{F}(x)$. On pourra chercher à exprimer $\mathrm{F}(x)$ en fonction de Λ pour $x > 0$.

Corrigé : 1. On pose $f(x,t) = \mathrm{e}^{-xt^2}$ pour $(x,t) \in \mathrm{X}\times\mathrm{I}$ avec $\mathrm{X} = \,]\,0\,;+\infty\,[$ et $\mathrm{I} = [\,0\,;+\infty\,[$. Vérifions les hypothèses du théorème de continuité sous l'intégrale.
• Pour $x \in \mathrm{X}$, on a $t \mapsto f(x,t)$ continue (par morceaux) sur I par théorèmes généraux.
• Pour $t \in \mathrm{I}$, on a $x \mapsto f(x,t)$ continue sur X par théorèmes généraux.
• Domination : on procède localement car $\operatorname*{Sup}\limits_{x>0} \mathrm{e}^{-xt^2} = 1$ et $t \mapsto 1$ n'est pas intégrable sur I. Pour $a > 0$, on a

$$\forall (x,t) \in [\,a\,;+\infty\,[\,\times\mathrm{I} \qquad |f(x,t)| \leqslant \varphi(t) \quad \text{avec} \quad \varphi(t) = \mathrm{e}^{-at^2}$$

On a $\varphi \in \mathscr{C}(\mathrm{I},\mathbb{R}_+)$ et $\varphi(t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées d'où son intégrabilité sur I. Ainsi, d'après le théorème de continuité sous l'intégrale, la fonction F est bien définie et continue sur tout $[\,a\,;+\infty\,[$ avec $a > 0$ d'où

$$\boxed{\text{La fonction F est bien définie et continue sur }]\,0\,;+\infty\,[.}$$

2. Soit $x > 0$. Avec le changement de variables $u = \sqrt{x}t$, les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt^2}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u$ sont de même nature donc convergentes et égales et par conséquent

$$\boxed{\forall x > 0 \qquad \mathrm{F}(x) = \frac{\Lambda}{\sqrt{x}} \quad \text{et} \quad \mathrm{F}(x) \xrightarrow[x\to 0]{} +\infty}$$

Exercice 4 (**)

Pour x réel, on pose $\qquad \mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{ch}\,(2xt)\,\mathrm{d}t$

1. Établir que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. Vérifier que F est solution d'une équation différentielle d'ordre 1.

3. En déduire une expression de $\mathrm{F}(x)$ pour x réel.

On admettra l'égalité $$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Corrigé : 1. On pose $\qquad \forall (x,t) \in \mathrm{X}\times\mathrm{I} \qquad f(x,t) = \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{ch}\,(2xt)$
avec $\mathrm{X} = \mathbb{R}$ et $\mathrm{I} = [\,0\,;+\infty\,[$. Vérifions les différentes hypothèses du théorème de régularité $\mathscr{C}^1$ sous l'intégrale.
• Soit $x \in \mathrm{X}$. On a $t \mapsto f(x,t) \in \mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I},\mathbb{R})$ puis,

$$\mathrm{ch}\,(2xt) \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\mathrm{e}^{2|x|t}\right) \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{ch}\,(2xt) \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\mathrm{e}^{-t^2/2+2|x|t}\right) = \mathrm{o}(1)$$

Par croissances comparées, il vient $t^2\mathrm{e}^{-t^2/2} \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}(1)$ d'où

$$t^2 f(x,t) = t^2\mathrm{e}^{-t^2/2} \times \mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{ch}\,(2xt) \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}(1)$$

ce qui signifie $f(x,t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$. Il s'ensuit que $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur I.
• Pour tout $t \in \mathrm{I}$, on a $x \mapsto f(x,t) \in \mathscr{C}^1(\mathrm{X},\mathbb{R})$ par théorèmes généraux.
Par dérivation, on trouve

$$\forall (x,t) \in \mathrm{X}\times\mathrm{I} \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = 2t\,\mathrm{sh}\,(2xt)\mathrm{e}^{-t^2}$$

• Pour tout $x \in \mathrm{X}$, on a $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) \in \mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I},\mathbb{R})$.
• Domination : La fonction $x \mapsto \mathrm{sh}\,(2xt)$ n'étant pas bornée sur $\mathrm{X} = \mathbb{R}$, il est impératif de passer par une domination locale. Soit $a > 0$. On a

$$\forall (x,t) \in [\,-a\,;a\,]\times\mathrm{I} \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant 2t\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{sh}\,(2at)$$

Comme précédemment, le théorème des croissances comparées donne $t^2 \times 2t\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{sh}\,(2at) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ et on en déduit l'intégrabilité de la fonction dominante. D'après le théorème de régularité $\mathscr{C}^1$ sous l'intégrale, il s'ensuit que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\,-a\,;a\,]$ et ce pour tout $a > 0$ d'où finalement

$$\boxed{\text{La fonction F est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

2. Par dérivation sous l'intégrale, il vient

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{F}'(x) = \int_{\mathrm{J}} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} 2t\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{sh}\,(2xt)\,\mathrm{d}t$$

On intègre par parties, les limites du crochet étant finies, et on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{F}'(x) = \underbrace{\left[-\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{sh}\,(2xt)\right]_0^{+\infty}}_{=0} + 2x\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{ch}\,(2xt)\,\mathrm{d}t$$

Il s'ensuit $$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{F}'(x) = 2x\mathrm{F}(x)}$$

3. On constate donc que F est solution de l'équation différentielle

$$y' - 2xy = 0$$

Il s'ensuit que $\mathrm{F}(x) = \lambda\mathrm{e}^{x^2}$ pour x réel et $\lambda = \mathrm{F}(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (intégrale de Gauss).

On conclut $$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{F}(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{x^2}}$$

Exercice 5 (**)

Pour $x > 0$, on pose $$\mathrm{F}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(t) - \cos(2t)}{t} \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$$

1. Démontrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$.
2. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{F}(x)$.
3. En déduire une expression de $\mathrm{F}(x)$ pour tout $x > 0$.

Corrigé : 1. On pose $\forall (x,t) \in \mathrm{X} \times \mathrm{I} \qquad f(x,t) = \dfrac{\cos(t) - \cos(2t)}{t}\mathrm{e}^{-xt}$

avec $\mathrm{X} = \,]\,0\,;+\infty\,[$ et $\mathrm{I} = \,]\,0\,;+\infty\,[$. Vérifions les hypothèses du théorème de régularité $\mathscr{C}^1$ sous l'intégrale.

• Soit $x \in \mathrm{X}$. On a $t \mapsto f(x,t) \in \mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ puis, avec le développement $\cos u = 1 + \mathrm{O}(u)$, il vient $f(x,t) \underset{t \to 0}{=} \mathrm{O}(1)$ et on a $f(x,t) \underset{t \to +\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées. On en déduit l'intégrabilité de $t \mapsto f(x,t)$ sur I.

• Pour $t \in \mathrm{I}$, on a $x \mapsto f(x,t)$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur X par théorèmes généraux. Par dérivation, on trouve

$$\forall (x,t) \in \mathrm{X} \times \mathrm{I} \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = (\cos(2t) - \cos(t))\,\mathrm{e}^{-xt}$$

• Pour $x \in \mathrm{X}$, on a $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) \in \mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$.

• Domination : Une domination globale ne fonctionne pas car l'exponentielle « s'évanouit » en zéro. Soit $a > 0$. On a

$$\forall (x,t) \in [\,a\,;+\infty\,[\times \mathrm{I} \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = |\cos(t) - \cos(2t)|\,\mathrm{e}^{-xt} \leqslant \varphi(t) \quad \text{avec} \quad \varphi(t) = 2\mathrm{e}^{-at}$$

La dominante φ est intégrable sur I puisque $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{2}{a}\mathrm{e}^{-at}\right]_0^{+\infty} = \frac{2}{a}$.

Ainsi, d'après le théorème de régularité $\mathscr{C}^1$ sous l'intégrale, on a F de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\,a\,;+\infty\,[$ avec $a > 0$ quelconque d'où

$$\boxed{\mathrm{F} \in \mathscr{C}^1(]\,0\,;+\infty\,[\,, \mathbb{R})}$$

2. D'après l'inégalité des accroissements finis, comme $|\cos'| = |\sin| \leqslant 1$, la fonction cos est 1-lipschitzienne. Il vient

$$\forall (x,t) \in \mathrm{X} \times \mathrm{I} \qquad 0 \leqslant |f(x,t)| = \left|\frac{\cos(t) - \cos(2t)}{t}\right| \mathrm{e}^{-xt} \leqslant \left|\frac{t - 2t}{t}\right| \mathrm{e}^{-xt} = \mathrm{e}^{-xt}$$

Comme $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$ converge pour $x > 0$, il vient par comparaison et inégalité triangulaire

$$\forall x > 0 \qquad 0 \leqslant |\mathrm{F}(x)| \leqslant \int_0^{+\infty} |f(x,t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}$$

Par encadrement, on conclut $$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \mathrm{F}(x) = 0}$$

Remarque : On peut procéder par convergence dominée mais c'est inutilement élaboré.

3. Par dérivation sous l'intégrale, il vient

$$\forall x > 0 \qquad \mathrm{F}'(x) = \int_0^{+\infty} [\cos(2t) - \cos(t)]\, \mathrm{e}^{-xt}\, \mathrm{d}t$$

Par linéarité car convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(t)\mathrm{e}^{-xt}\, \mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(2t)\mathrm{e}^{-xt}\, \mathrm{d}t$, on obtient

$$\forall x > 0 \qquad \mathrm{F}'(x) = \int_0^{+\infty} \cos(2t)\mathrm{e}^{-xt}\, \mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} \cos(t)\mathrm{e}^{-xt}\, \mathrm{d}t$$

Enfin par intégrabilité de $t \mapsto \mathrm{e}^{(\mathrm{i}-x)t}$ et $t \mapsto \mathrm{e}^{(2\mathrm{i}-x)t}$ sur I, on trouve

$$\begin{aligned} \forall x > 0 \qquad \mathrm{F}'(x) &= \mathrm{Re}\left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{(2\mathrm{i}-x)t}\, \mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{(\mathrm{i}-x)t}\, \mathrm{d}t\right) \\ &= \mathrm{Re}\left(\frac{1}{x-2\mathrm{i}} - \frac{1}{x-\mathrm{i}}\right) = \frac{x}{x^2+4} - \frac{x}{1+x^2} \end{aligned}$$

Après intégration, on a

$$\forall x > 0 \qquad \mathrm{F}(x) = \frac{1}{2}\ln(4+x^2) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \alpha = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{4+x^2}{1+x^2}\right) + \alpha$$

avec α réel. Enfin, on a $\dfrac{4+x^2}{1+x^2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$ d'où $\mathrm{F}(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \alpha = 0$. On conclut

$$\boxed{\forall x > 0 \qquad \mathrm{F}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{4+x^2}{1+x^2}\right)}$$

Exercice 6 (**)

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $$\mathrm{F}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(xt)}{t^2}\mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t$$

1. Montrer que la fonction F est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
2. Pour x réel, calculer $\mathrm{F}''(x)$ puis $\mathrm{F}'(x)$.
3. En déduire une expression de $\mathrm{F}(x)$ pour x réel.

Corrigé : 1. On pose $\qquad \forall (x,t) \in \mathrm{X} \times \mathrm{I} \qquad f(x,t) = \dfrac{\sin^2(xt)}{t^2}\mathrm{e}^{-t}$

avec $\mathrm{X} = \mathbb{R}$ et $\mathrm{I} = \,]\,0\,; +\infty\,[$. Vérifions les hypothèses du théorème de régularité $\mathscr{C}^2$ sous l'intégrale.
• Soit x réel. On a $t \mapsto f(x,t) \in \mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$. Avec l'inégalité $|\sin u| \leqslant |u|$ pour u réel, il vient

$$\forall t > 0 \qquad 0 \leqslant \frac{\sin^2(xt)}{t^2}\mathrm{e}^{-t} \leqslant x^2\mathrm{e}^{-t}$$

d'où l'intégrabilité de $t \mapsto f(x,t)$ sur I.
• Pour tout $t > 0$, on a $x \mapsto f(x,t) \in \mathscr{C}^2(\mathrm{X}, \mathbb{R})$ par théorèmes généraux. Par dérivation, on trouve

$$\forall (x,t) \in \mathrm{X} \times \mathrm{I} \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{\sin(2xt)}{t}\mathrm{e}^{-t} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = 2\cos(2xt)\mathrm{e}^{-t}$$

• Soit $x \in \mathrm{X}$. On a $\qquad \forall t > 0 \qquad \left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant 2\,|x|\,\mathrm{e}^{-t}$

et $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) \in \mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ d'où l'intégrabilité de $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ sur I.

• Pour $x \in \mathrm{X}$, on a $t \mapsto \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) \in \mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$.

• Domination : On a $\qquad \forall (x,t) \in \mathrm{X} \times \mathrm{I} \qquad \left| \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) \right| \leqslant 2\mathrm{e}^{-t}$

avec une dominante qui est clairement intégrable sur I. Par régularité $\mathscr{C}^2$ sous l'intégrale, on conclut

$$\boxed{\text{La fonction F est de classe } \mathscr{C}^2 \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

2. Par dérivation sous l'intégrale, on a

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{F}'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(2xt)}{t} \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \mathrm{F}''(x) = \int_0^{+\infty} 2\cos(2xt)\mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t$$

La fonction $t \mapsto 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}2xt}\mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $[\,0\,; +\infty\,[$ puisque

$$\int_0^{+\infty} \left| 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}2xt}\mathrm{e}^{-t} \right| \, \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} 2\mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t = [-2\mathrm{e}^{-t}]_0^{+\infty} = 2$$

Ainsi, pour x réel

$$\mathrm{F}''(x) = 2\,\mathrm{Re}\left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{(2\mathrm{i}x-1)t} \, \mathrm{d}t \right) = 2\,\mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-2\mathrm{i}x} \right) = \frac{2}{1+4x^2}$$

puis $$\mathrm{F}'(x) = \underbrace{\mathrm{F}'(0)}_{=0} + \int_0^x \frac{2\mathrm{d}t}{1+4t^2} = \mathrm{Arctan}\,(2x)$$

On conclut $$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{F}''(x) = \frac{2}{1+4x^2} \qquad \mathrm{F}'(x) = \mathrm{Arctan}\,(2x)}$$

3. Une dernière intégration donne

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{F}(x) = \mathrm{F}(0) + \int_0^x \mathrm{F}'(t) \, \mathrm{d}t = \mathrm{F}(0) + \int_0^x \mathrm{Arctan}\,(2t) \, \mathrm{d}t$$

On a clairement $\mathrm{F}(0) = 0$ puis une intégration par parties donne pour x réel

$$\mathrm{F}(x) = [t\,\mathrm{Arctan}\,(2t)]_0^x - \int_0^x \frac{2t\mathrm{d}t}{1+4t^2}$$

On conclut $$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{F}(x) = x\,\mathrm{Arctan}\,(2x) - \frac{1}{4}\ln(1+4x^2)}$$

Exercice 7 (**)

À l'aide d'une intégrale à paramètre, établir que la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$ admet un prolongement de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Corrigé : On pose $f(x,t) = \cos(tx)$ pour $(x,t) \in \mathrm{X} \times \mathrm{I}$ avec $\mathrm{X} = \mathbb{R}$, $\mathrm{I} = [\,0\,;1\,]$ et

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{F}(x) = \int_0^1 \cos(tx) \, \mathrm{d}t$$

On a $$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{F}(x) \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit n entier non nul. Vérifions les hypothèses de régularité $\mathscr{C}^n$ sous l'intégrale.

• Pour $x \in \mathrm{X}$, on a $t \mapsto f(x,t) \in \mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I},\mathbb{R})$ donc intégrable sur le segment I.

• Pour $t \in \mathrm{I}$, on a $x \mapsto f(x,t) \in \mathscr{C}^n(\mathrm{X},\mathbb{R})$ d'après les théorèmes généraux. Par dérivation, on trouve pour $k \in [\![1\,;\, n]\!]$

$$\forall (x,t) \in \mathrm{X}\times\mathrm{I} \qquad \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t) = t^k \cos\left(tx + \frac{k\pi}{2}\right)$$

• Soit $k \in [\![1\,;\, n-1]\!]$. Pour $x \in \mathrm{X}$, on a $t \mapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t) \in \mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I},\mathbb{R})$ donc intégrable sur le segment I.

• Pour $x \in \mathrm{X}$, on a $t \mapsto \dfrac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t) \in \mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I},\mathbb{R})$.

• Domination : On a

$$\forall (x,t) \in \mathrm{X}\times\mathrm{I} \qquad \left|\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t) \quad \text{avec} \quad \varphi(t) = 1$$

La fonction φ est clairement intégrable sur I. D'après le théorème de régularité $\mathscr{C}^n$ sous l'intégrale, on a $\mathrm{F} \in \mathscr{C}^n(\mathrm{X},\mathbb{R})$ et ce pour tout n entier non nul. Enfin, la fonction F coïncide avec $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$ ce qui prouve

$$\boxed{\text{La fonction } x \in \mathbb{R}^* \mapsto \frac{\sin(x)}{x} \text{ admet un prolongement de classe } \mathscr{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}.}$$