Feuille d'exercices n°05

Exercice 1 (**)

On pose $$\forall x > -1 \qquad \mathrm{F}(x) = \int_0^1 \frac{t^x - 1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1\,;+\infty\,[$.
2. En déduire une expression de $\mathrm{F}(x)$ pour $x > -1$.

Corrigé : 1. On pose $$\forall (x,t) \in \mathrm{X} \times \mathrm{I} \qquad f(x,t) = \frac{t^x - 1}{\ln(t)}$$

avec $\mathrm{X} = \,]-1\,;+\infty\,[$ et $\mathrm{I} = \,]\,0\,;1\,[$. Vérifions les hypothèses du théorème de régularité $\mathscr{C}^1$ sous l'intégrale.

• Soit $x \in \mathrm{X}$. On a $t \mapsto f(x,t) \in \mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I},\mathbb{R})$ puis

$$f(x,t) \underset{t\to 0}{=} \begin{cases} \mathrm{o}(1) & \text{si } x \geqslant 0 \\ \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{t^{-x}}\right) & \text{si } x \in \,]-1\,;0\,[\end{cases} \qquad \text{et} \qquad f(x,t) \underset{t\to 1}{\sim} \frac{x(t-1)}{t-1} \xrightarrow[t\to 1]{} x$$

Ainsi, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable en 0 par comparaison et éventuellement critère de Riemann et en 1 car prolongeable par continuité.

• Pour $t \in \mathrm{I}$, on a $x \mapsto f(x,t) \in \mathscr{C}^1(\mathrm{X},\mathbb{R})$ par théorème généraux. Par dérivation, on trouve

$$\forall (x,t) \in \mathrm{X} \times \mathrm{I} \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = t^x$$

• Pour $x \in \mathrm{X}$, on a $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) \in \mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I},\mathbb{R})$ par théorèmes généraux.

• Domination : On procède localement pour empêcher x d'être arbitrairement proche de -1. Soit $a > -1$. On a

$$\forall (x,t) \in [\,a\,;+\infty\,[\times \mathrm{I} \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t) \quad \text{avec} \quad \varphi(t) = \frac{1}{t^{-a}}$$

On a $\varphi \in \mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I},\mathbb{R}_+)$, intégrable sur I par critère de Riemann puisque $-a < 1$. Par conséquent, la fonction F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\,a\,;+\infty\,[$ pour tout $a > -1$ d'où

$$\boxed{\mathrm{F} \in \mathscr{C}^1(]-1\,;+\infty\,[\,,\mathbb{R})}$$

2. Par dérivation sous l'intégrale, on a

$$\forall x > -1 \qquad \mathrm{F}'(x) = \int_0^1 t^x\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x+1}$$

Ainsi $$\forall x > -1 \qquad \mathrm{F}(x) = \mathrm{F}(0) + \int_0^x \frac{\mathrm{d}u}{u+1}$$

On conclut $$\boxed{\forall x > -1 \qquad \mathrm{F}(x) = \ln(1+x)}$$

Exercice 2 (**)

On pose $$\forall x \geqslant 0 \qquad \mathrm{F}(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 + x\sin(t)^2)\,\mathrm{d}t$$

1. Justifier que F est bien définie et continue sur $[\,0\,;+\infty\,[$.
2. Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\,0\,;+\infty\,[$.
3. Préciser une expression de $\mathrm{F}'(x)$ avec $x \geqslant 0$ à l'aide du changement de variable $u = \tan(t)$.
4. Conclure que $$\forall x \geqslant 0 \qquad \mathrm{F}(x) = \pi\left[\ln(1+\sqrt{1+x}) - \ln(2)\right]$$

1. On pose $$\forall (x,t) \in \mathrm{X}\times\mathrm{I} \qquad f(x,t) = \ln(1 + x\sin(t)^2)$$

avec $\mathrm{X} = [\,0\,;+\infty\,[$ et $\mathrm{I} = \left[\,0\,;\dfrac{\pi}{2}\,\right]$. Vérifions les hypothèses du théorème de continuité sous l'intégrale.

- Pour $x \in \mathrm{X}$, on a $t \mapsto f(x,t) \in \mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I},\mathbb{R})$ par théorèmes généraux.
- Pour $t \in \mathrm{I}$, on a $x \mapsto f(x,t) \in \mathscr{C}^0(\mathrm{X},\mathbb{R})$ par théorèmes généraux.
- Domination : On a $\operatorname*{Sup}_{x\geqslant 0} |f(x,t)| = +\infty$ donc il faut procéder localement. Soit $a \geqslant 0$. On a

$$\forall (x,t) \in [\,0\,;a\,] \times \left[\,0\,;\frac{\pi}{2}\,\right] \qquad |f(x,t)| \leqslant \ln(1+a)$$

Comme une fonction constante est intégrable sur un segment, il s'ensuit que F est continue sur $[\,0\,;a\,]$ pour tout $a \geqslant 0$ d'où

$$\boxed{\text{La fonction F est bien définie, continue sur } [\,0\,;+\infty\,[.}$$

2. Vérifions les hypothèses du théorème de régularité $\mathscr{C}^1$ sous l'intégrale.

- Pour $x \in \mathrm{X}$, on a $t \mapsto f(x,t) \in \mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I},\mathbb{R})$ et intégrable sur le segment I.
- Pour $t \in \mathrm{I}$, on a $x \mapsto f(x,t) \in \mathscr{C}^1(\mathrm{X},\mathbb{R})$ par théorèmes généraux. Par dérivation, il vient

$$\forall (x,t) \in \mathrm{X}\times\mathrm{I} \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{\sin(t)^2}{1 + x\sin^2 t}$$

- Pour $x \in \mathrm{X}$, on a $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) \in \mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I},\mathbb{R})$ par théorèmes généraux.
- Domination : On a

$$\forall (x,t) \in \mathrm{X}\times\mathrm{I} \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant 1$$

Et la dominante constante est intégrable sur le segment I. Ainsi

$$\boxed{\mathrm{F} \in \mathscr{C}^1([\,0\,;+\infty\,[\,,\mathbb{R})}$$

3. Par dérivation sous l'intégrale, on a

$$\forall x \geqslant 0 \qquad \mathrm{F}'(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)^2}{1 + x\sin(t)^2}\,\mathrm{d}t$$

En factorisant $\cos^2 t$ au numérateur et dénominateur, on trouve

$$\forall x \geqslant 0 \qquad \mathrm{F}'(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan(t)^2}{1 + (1+x)\tan(t)^2}\,\mathrm{d}t$$

Avec le changement de variable $u = \tan(t) \iff t = \operatorname{Arctan}(u)$ où $\operatorname{Arctan} :]\,0\,;+\infty\,[\to \left]\,0\,;\dfrac{\pi}{2}\,\right[$ est bijectif, de classe $\mathscr{C}^1$ et strictement croissant, on obtient l'égalité (la convergence étant assurée)

$$\forall x \geqslant 0 \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan(t)^2}{1+(1+x)\tan(t)^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{u^2}{(1+(1+x)u^2)(1+u^2)}\,\mathrm{d}u$$

Pour $x > 0$, on trouve la décomposition en éléments simples

$$\frac{u^2}{(1+(1+x)u^2)(1+u^2)} = \frac{1}{x}\left[\frac{1}{1+u^2} - \frac{1}{1+(1+x)u^2}\right]$$

Puis $\qquad \forall x > 0 \qquad \mathrm{F}'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x}\left[\frac{1}{1+u^2} - \frac{1}{1+(1+x)u^2}\right]\mathrm{d}u = \frac{\pi}{2x}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+x}}\right)$

En mettant au même dénominateur et en multipliant par l'expression conjuguée, on trouve

$$\forall x > 0 \qquad \mathrm{F}'(x) = \frac{\pi}{2\sqrt{1+x}(\sqrt{1+x}+1)}$$

Par continuité de F' en 0, on conclut

$$\boxed{\forall x \geqslant 0 \qquad \mathrm{F}'(x) = \frac{\pi}{2\sqrt{1+x}(\sqrt{1+x}+1)}}$$

4. Enfin, avec le changement de variables $u = \sqrt{1+t}$, on trouve

$$\forall x \geqslant 0 \qquad \mathrm{F}(x) = \mathrm{F}(0) + \int_0^x \mathrm{F}'(t)\,\mathrm{d}t = \pi \int_1^{\sqrt{1+x}} \frac{\mathrm{d}u}{1+u} = \pi\left[\ln(1+u)\right]_1^{\sqrt{1+x}}$$

D'où $\qquad \boxed{\forall x \geqslant 0 \qquad \mathrm{F}(x) = \pi\left[\ln(1+\sqrt{1+x}) - \ln(2)\right]}$

Exercice 3 (***)

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $\qquad \mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \exp\left[-\left(t^2 + \frac{x^2}{t^2}\right)\right]\,\mathrm{d}t$

1. Montrer que F est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que F est $\mathscr{C}^1$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$.
3. Former une équation différentielle vérifiée par F sur $]\,0\,;+\infty\,[$.
4. En déduire une expression simple de F sur $\mathbb{R}$.

Corrigé : 1. On pose $\quad \forall (x,t) \in \mathrm{X}\times\mathrm{I} \qquad f(x,t) = \exp\left[-\left(t^2 + \dfrac{x^2}{t^2}\right)\right]$

avec $\mathrm{X} = \mathbb{R}$ et $\mathrm{I} =]\,0\,;+\infty\,[$. Vérifions les hypothèses du théorème continuité sous l'intégrale.

• Pour x réel, on a $t \mapsto f(x,t) \in \mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I},\mathbb{R})$ par théorèmes généraux.
• Pour $t \in \mathrm{I}$, on a $x \mapsto f(x,t) \in \mathscr{C}(\mathrm{X},\mathbb{R})$ par théorèmes généraux.
• Domination : On a

$$\forall (x,t) \in \mathrm{X}\times\mathrm{I} \qquad |f(x,t)| \leqslant \varphi(t) \quad \text{avec} \quad \varphi(t) = \mathrm{e}^{-t^2}$$

On a $\varphi \in \mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I},\mathbb{R}_+)$, intégrable sur I puisque $\varphi(t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$. Ainsi

$$\boxed{\text{La fonction F est définie, continue sur } \mathbb{R}.}$$

2. On note $\mathrm{X}' =]\,0\,;+\infty\,[$. Vérifions les hypothèses du théorème de régularité $\mathscr{C}^1$ sous l'intégrale.

• Pour $x \in \mathrm{X}'$, on a $t \mapsto f(x,t) \in \mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I},\mathbb{R})$ et intégrable d'après la domination de la question précédente.
• Pour $t \in \mathrm{I}$, on a $x \mapsto f(x,t) \in \mathscr{C}^1(\mathrm{X},\mathbb{R})$ par théorèmes généraux. Par dérivation, on trouve

$$\forall (x,t) \in \mathrm{X}' \times \mathrm{I} \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -\frac{2x}{t^2} \exp\left[-\left(t^2 + \frac{x^2}{t^2}\right)\right]$$

• Pour $x \in \mathrm{X}'$, on a $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) \in \mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I},\mathbb{R})$ par théorèmes généraux.
• Domination : On procède localement. Soit $[\,a\,;b\,] \subset \mathrm{X}'$. On a

$$\forall (x,t) \in \mathrm{X}' \times \mathrm{I} \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t) \quad \text{avec} \quad \varphi(t) = 2b\frac{\mathrm{e}^{-\frac{a^2}{t^2}}}{t^2}\mathrm{e}^{-t^2}$$

On a $\varphi \in \mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I},\mathbb{R}_+)$ avec $\varphi(t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ et $\varphi(t) \xrightarrow[t\to 0]{} 0$ par croissances comparées puisque

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{a^2}{t^2}}}{t^2} \underbrace{=}_{u=1/t} \lim_{u\to+\infty} u^2\mathrm{e}^{-a^2u^2} = 0$$

La fonction φ est donc intégrable sur I et par conséquent, la fonction F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur tout segment $[\,a\,;b\,] \subset \mathrm{X}'$ d'où

$$\boxed{\mathrm{F} \in \mathscr{C}^1(]\,0\,;+\infty\,[\,,\mathbb{R})}$$

3. Par dérivation sous l'intégrale, il vient

$$\forall x > 0 \qquad \mathrm{F}'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} -\frac{2x}{t^2}\exp\left[-\left(t^2+\frac{x^2}{t^2}\right)\right]\,\mathrm{d}t$$

Avec le changement de variables $u = \dfrac{x}{t}$, on obtient l'égalité (la convergence étant assurée)

$$\int_0^{+\infty} -\frac{2x}{t^2}\exp\left[-\left(t^2+\frac{x^2}{t^2}\right)\right]\,\mathrm{d}t = -2\int_0^{+\infty} \exp\left[-\left(\frac{x^2}{u^2}+u^2\right)\right]\,\mathrm{d}u$$

Ainsi
$$\boxed{\forall x > 0 \qquad \mathrm{F}'(x) + 2\mathrm{F}(x) = 0}$$

4. On en déduit
$$\forall x > 0 \qquad \mathrm{F}(x) = \lambda\mathrm{e}^{-2x}$$

Par continuité en 0, il vient $\lambda = \mathrm{F}(0) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$. Enfin, la fonction F est bien définie sur $\mathbb{R}$ et est paire d'où

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{F}(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{-2|x|}}$$

Exercice 4 (***)

Pour $x \geqslant 0$, on pose
$$\mathrm{F}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que F est définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.
2. Calculer $\mathrm{F}'(x)$ pour $x \neq 1$ puis montrer que l'expression vaut aussi pour $x = 1$.
3. En déduire une expression simple de $\mathrm{F}(x)$.

4. Calculer $$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}\,(t)^2}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

Corrigé : 1. On pose $\qquad \forall (x,t) \in \mathrm{X} \times \mathrm{I} \qquad f(x,t) = \dfrac{\mathrm{Arctan}\,(xt)}{t(1+t^2)}$

avec $\mathrm{X} = \mathbb{R}_+$ et $\mathrm{I} = \,]\,0\,;+\infty\,[$. Vérifions les hypothèses du théorème de régularité $\mathscr{C}^1$ sous l'intégrale.

• Pour $x \in \mathrm{X}$, on a $t \mapsto f(x,t) \in \mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ par théorèmes généraux. Puis, on a

$$f(x,t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{xt}{t} \xrightarrow[t\to 0]{} x \quad \text{et} \quad f(x,t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

ce qui prouve l'intégrabilité de $t \mapsto f(x,t)$ sur I.

• Pour $t \in \mathrm{I}$, on a $x \mapsto f(x,t) \in \mathscr{C}^1(\mathrm{X}, \mathbb{R})$ par théorèmes généraux. Par dérivation, on trouve

$$\forall (x,t) \in \mathrm{X} \times \mathrm{I} \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{1}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}$$

• Pour $x \in \mathrm{X}$, on a $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) \in \mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ par théorèmes généraux.

• Domination : On a

$$\forall (x,t) \in \mathrm{X} \times \mathrm{I} \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t) \quad \text{avec} \quad \varphi(t) = \frac{1}{1+t^2}$$

La fonction φ est dans $\mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I}, \mathbb{R}_+)$, intégrable sur I puisque $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = [\mathrm{Arctan}\,t]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$.
Ainsi

$$\boxed{\mathrm{F} \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})}$$

2. Soit $x \geqslant 0$ et $x \neq 1$. Par décomposition en éléments simples, on trouve

$$\frac{1}{(1+t^2)(1+x^2t^2)} = \frac{1}{1-x^2}\left[\frac{1}{1+t^2} - \frac{x^2}{1+x^2t^2}\right]$$

On suppose également $x \neq 0$ pour l'intégration du second membre. Il vient

$$\mathrm{F}'(x) = \frac{1}{1-x^2}\int_0^{+\infty}\left[\frac{1}{1+t^2} - \frac{x^2}{1+x^2t^2}\right]\mathrm{d}t = \frac{1}{1-x^2}\frac{\pi}{2}(1-x) = \frac{\pi}{2(1+x)}$$

La formule vaut aussi pour $x = 0$. Par ailleurs, comme F' est continue sur $\mathbb{R}_+$, on a $\mathrm{F}'(1) = \lim\limits_{x\to 1} \mathrm{F}'(x)$ et par conséquent

$$\boxed{\forall x \geqslant 0 \qquad \mathrm{F}'(x) = \frac{\pi}{2(1+x)}}$$

Remarque : Pour faire efficacement la décomposition en éléments simples, on peut considérer

$$\frac{1}{(1+u)(1+x^2u)} = \frac{x^2u + 1 - x^2(u+1)}{(1+u)(1+x^2u)}\frac{1}{1-x^2}$$

et l'appliquer en $u = t^2$.

3. Par intégration, il vient

$$\boxed{\forall x \geqslant 0 \qquad \mathrm{F}(x) = \mathrm{F}(0) + \int_0^x \mathrm{F}'(u)\,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{2}\ln(1+x)}$$

4. Les fonctions $t \mapsto \text{Arctan}\,(t)^2$ et $t \mapsto -\dfrac{1}{t}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$. On a

$$-\frac{\text{Arctan}\,(t)^2}{t} \underset{t\to 0}{\sim} -\frac{t^2}{t} \underset{t\to 0}{\sim} -t \xrightarrow[t\to 0]{} 0 \quad \text{et} \quad -\frac{\text{Arctan}\,(t)^2}{t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

Ainsi, d'après le théorème d'intégration par parties, les intégrales

$$\int_0^{+\infty} \frac{\text{Arctan}\,(t)^2}{t^2}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} -\frac{2\,\text{Arctan}\,t}{t(1+t^2)}\,\mathrm{d}t = -2\mathrm{F}(1)$$

sont de même nature donc convergentes et on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{\text{Arctan}\,(t)^2}{t^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{\text{Arctan}\,(t)^2}{t}\right]_0^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty} \frac{\text{Arctan}\,t}{t(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$$

On conclut
$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\text{Arctan}\,(t)^2}{t^2}\,\mathrm{d}t = \pi\ln(2)}$$

Exercice 5 (***)

Pour $x > 0$, on pose
$$\mathrm{F}(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{t+x}\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que F est définie et continue sur $]\,0\,;+\infty\,[$.
2. Déterminer les limites de F en 0^+ et en $+\infty$.
3. Déterminer des équivalents de F en 0^+ et en $+\infty$.

Corrigé : 1. Posons
$$\forall (x,t) \in \mathrm{X}\times\mathrm{I} \qquad f(x,t) = \frac{\cos(t)}{t+x}$$

avec $\mathrm{X} = \,]\,0\,;+\infty\,[$ et $\mathrm{I} = \left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$. Vérifions les hypothèses du théorème de continuité sous l'intégrale.

• Pour $x \in \mathrm{X}$, l'application $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur I par théorèmes généraux.

• Pour $t \in \mathrm{I}$, l'application $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur X par théorèmes généraux.

• Domination : Une domination globale ne fonctionne pas. Soit $a > 0$. On a

$$\forall (x,t) \in [\,a\,;+\infty\,[\,\times\mathrm{I} \qquad |f(x,t)| \leqslant \varphi(t) \quad \text{avec} \quad \varphi(t) = \frac{\cos(t)}{a+t}$$

et la fonction φ est intégrable sur I comme fonction continue sur un segment. D'après le théorème de continuité sous l'intégrale, on a F continue sur $[\,a\,;+\infty\,[$ pour tout $a > 0$ et par conséquent

$$\boxed{\text{La fonction F est définie, continue sur }]\,0\,;+\infty\,[.}$$

2. Sans difficulté, on trouve

$$\forall x > 0 \qquad 0 \leqslant \mathrm{F}(x) \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{x}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}$$

Par encadrement
$$\boxed{\mathrm{F}(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0}$$

Par étude de fonction ou inégalité des accroissements finis, on montre

$$\forall t \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right] \qquad \cos t \geqslant 1 - t$$

Il vient $$\forall x > 0 \qquad \mathrm{F}(x) \geqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-t}{t+x}\,\mathrm{d}t$$

et $$\forall x > 0 \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-t}{t+x}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+x-(t+x)}{t+x}\,\mathrm{d}t = (1+x)\left[\ln\left(\frac{\pi}{2}+x\right) - \ln(x)\right] - \frac{\pi}{2}$$

Par comparaison $$\boxed{\mathrm{F}(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty}$$

Variante : Avec un changement de variable, on trouve
$$\forall x > 0 \qquad \mathrm{F}(x) = \int_x^{\frac{\pi}{2}+x} \frac{\cos(u-x)}{u}\,\mathrm{d}u = \cos x \int_x^{\frac{\pi}{2}+x} \frac{\cos(u)}{u}\,\mathrm{d}u + \sin x \int_x^{\frac{\pi}{2}+x} \frac{\sin(u)}{u}\,\mathrm{d}u$$
Par limite monotone, on a $x \mapsto \displaystyle\int_x^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(u)}{u}\,\mathrm{d}u$ qui décroît donc admet une limite infinie en 0^+ sans quoi l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(u)}{u}\,\mathrm{d}u$ serait convergente ce qui est absurde. Les autres termes ont tous une limite finie d'où le résultat.

3. Par monotonie et croissance de l'intégrale, on a
$$\forall x > 0 \qquad \frac{1}{\frac{\pi}{2}+x}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \mathrm{F}(x) \leqslant \frac{1}{x}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\,\mathrm{d}t$$

Et par conséquent $$\boxed{\mathrm{F}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x}}$$

Variante : On a $$\forall x > 0 \qquad x\mathrm{F}(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{1+\frac{t}{x}}\,\mathrm{d}t$$
Par convergence dominée avec la dominante constante $t \mapsto 1$, on obtient
$$x\mathrm{F}(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\,\mathrm{d}t = 1$$
et on retrouve le résultat précédent.

On a exhibé un minorant explicite à $\mathrm{F}(x)$ pour $x > 0$ dans la question précédente. On a également
$$\forall x > 0 \qquad \mathrm{F}(x) \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{x+t} = \ln\left(\frac{\pi}{2}+x\right) - \ln(x)$$
Le majorant et le minorant sont tous deux équivalents à $-\ln(x)$ pour $x \to 0^+$ d'où la conclusion
$$\boxed{\mathrm{F}(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -\ln(x)}$$

Exercice 6 (****)

On pose $$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{F}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que F est définie, continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.

3. Étudier la dérivabilité de F en zéro.

Corrigé : 1. On pose $\qquad \forall (x,t) \in \mathrm{X} \times \mathrm{I} \qquad f(x,t) = \dfrac{\sin(xt)}{1+t^2}$

avec $\mathrm{X} = \mathbb{R}$ et $\mathrm{I} = [\,0\,;+\infty\,[$. Vérifions les hypothèses du théorème de continuité sous l'intégrale.
- Pour $x \in \mathrm{X}$, on a $t \mapsto f(x,t) \in \mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I},\mathbb{R})$ par théorèmes généraux.
- Pour $t \in \mathrm{I}$, on a $x \mapsto f(x,t) \in \mathscr{C}(\mathrm{X},\mathbb{R})$ par théorèmes généraux.
- Domination : On a

$$\forall (x,t) \in \mathrm{X} \times \mathrm{I} \qquad |f(x,t)| \leqslant \varphi(t) \quad \text{avec} \quad \varphi(t) = \frac{1}{1+t^2}$$

On a $\varphi \in \mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I},\mathbb{R}_+)$ et intégrable sur I puisque $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = [\mathrm{Arctan}\ t]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$. Ainsi

$$\boxed{\text{La fonction F est bien définie, continue sur } \mathbb{R}.}$$

2. Pour $t \in \mathrm{I}$, on a $x \mapsto f(x,t) \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^*,\mathbb{R})$ par théorèmes généraux et par dérivation

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}_+ \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{t\cos(xt)}{1+t^2}$$

Il semble alors compromis d'établir une domination intégrable. Transformons l'intégrale d'origine. Soit $\mathrm{X}' = \,]\,0\,;+\infty\,[$. Pour $x \in \mathrm{X}'$, avec le changement de variables $u = xt$, on obtient l'égalité (la convergence étant assurée)

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = x\mathrm{G}(x) \quad \text{avec} \quad \mathrm{G}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{x^2+u^2}\,\mathrm{d}u$$

On pose $\qquad \forall (x,t) \in \mathrm{X}' \times \mathrm{I} \qquad g(x,t) = \dfrac{\sin(t)}{x^2+t^2}$

Vérifions les hypothèses du théorème de régularité $\mathscr{C}^1$ sous l'intégrale.
- Pour $x > 0$, on a $t \mapsto g(x,t) \in \mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I},\mathbb{R})$ et $g(x,t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ d'où son intégrabilité sur I.
- Pour $t \in \mathrm{I}$, on a $x \mapsto g(x,t) \in \mathscr{C}^1(\mathrm{X}',\mathbb{R})$ par théorèmes généraux. Par dérivation, on trouve

$$\forall (x,t) \in \mathrm{X}' \times \mathrm{I} \qquad \frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = -\frac{2x\sin(t)}{(x^2+t^2)^2}$$

- Pour $x > 0$, on a $t \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t) \in \mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I},\mathbb{R})$ par théorèmes généraux.
- Domination : On procède localement. Soit $[\,a\,;b\,] \subset \mathrm{X}'$. On a

$$\forall (x,t) \in [\,a\,;b\,] \times \mathrm{I} \qquad \left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \psi(t) \quad \text{avec} \quad \psi(t) = \frac{2b}{(a^2+t^2)^2}$$

On a $\psi \in \mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I},\mathbb{R}_+)$ et $\psi(t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ d'où son intégrabilité sur I. Ainsi, la fonction G est de classe $\mathscr{C}^1$ sur tout segment de X' donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur X' et par parité de G, il s'ensuit que G est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ d'où

$$\boxed{\mathrm{F} \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^*,\mathbb{R})}$$

3. Soit $x \neq 0$. D'après ce qui précède, on a

$$\frac{\mathrm{F}(x)}{x} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u^2+x^2}\,\mathrm{d}u = \mathrm{H}(x) + \mathrm{K}(x)$$

avec $\qquad \mathrm{H}(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(u)}{u^2+x^2}\,\mathrm{d}u \quad \text{et} \quad \mathrm{K}(x) = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u^2+x^2}\,\mathrm{d}u$

Sans difficultés, on a K définie continue en 0. La fonction H décroît sur $]\,0\,;+\infty\,[$ donc admet une limite en 0^+ (de même en 0^- par parité). Soit $\varepsilon \in\,]\,0\,;\pi\,[$. Par positivité de l'intégrande, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \qquad \mathrm{H}(x) \geqslant \int_\varepsilon^\pi \frac{\sin(u)}{u^2+x^2}\,\mathrm{d}u$$

Par continuité sous l'intégrale de droite ci-dessus (sans difficulté), il vient par passage à la limite

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \lim_{x\to 0^+} \mathrm{H}(x) \geqslant \int_\varepsilon^\pi \frac{\sin(u)}{u^2}\,\mathrm{d}u$$

Or, la fonction $u \mapsto \dfrac{\sin(u)}{u^2}$ est positive non intégrable sur $]\,0\,;\pi\,]$ d'où

$$\int_\varepsilon^\pi \frac{\sin(u)}{u^2}\,\mathrm{d}u \xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{} +\infty$$

On en déduit
$$\frac{\mathrm{F}(x)}{x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$$

Et on conclut $\boxed{\text{La fonction F n'est pas dérivable en 0.}}$

Variante : D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange, on a

$$\forall u \in \mathbb{R} \qquad |\sin(u) - u| \leqslant \frac{u^2}{2}$$

et il vient
$$\left|\mathrm{H}(x) - \int_0^1 \frac{u}{u^2+x^2}\,\mathrm{d}u\right| \leqslant \int_0^1 \frac{|\sin(u)-u|}{u^2+x^2}\,\mathrm{d}u \leqslant \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{u^2}{u^2+x^2}\,\mathrm{d}u$$

et
$$\int_0^1 \frac{u^2}{u^2+x^2}\,\mathrm{d}u = 1 - x^2\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{u^2+x^2} = 1 - x\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x\to 0}{=} \mathrm{O}(1)$$

Ainsi
$$\mathrm{H}(x) \underset{x\to 0}{=} \left[\frac{1}{2}\ln(u^2+x^2)\right]_0^1 + \mathrm{O}(1) = -\ln(x) + \mathrm{O}(1)$$

Par conséquent
$$\frac{\mathrm{F}(x)}{x} = -\ln(x) + \mathrm{O}(1) \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$$

On retrouve le résultat précédent.