ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025 12/09/2024

Commentaires - Devoir en temps libre n°1

Remarques générales : Il faut laisser une marge pour le décompte des points et proscrire les jeux de piste. Pour une intégrale, le premier effort consiste à identifier l'intégrande et son intervalle d'intégration et de préciser la continuité par morceaux sur cet intervalle. Lors d'un changement de variables pour des intégrales généralisées, il faut mentionner que les intégrales sont de même nature et si elles convergent, alors elles sont égales. Lors d'une intégration par parties généralisée, il faut commencer par établir la finitude du crochet. Comparer une fonction positive à une fonction négative ne présente pas d'intérêt. Pour utiliser le critère des équivalents sans évoquer de l'intégrabilité, il faut mentionner le signe constant de l'une des fonctions concernées.

Problème I

1. Question pas toujours comprise : il faut établir $1-2x\cos t+x^2>0$ pour $x>1$ et $t\in[\,0\,;\pi\,]$ et préciser ensuite que pour $x>1$, l'intégrande $t\mapsto\ln(1-2x\cos t+x^2)$ est continue par morceaux sur le segment $[\,0\,;\pi\,]$ donc intégrable sur ce segment.

2. OK pour un grand nombre, parfois avec des lourdeurs (un seul changement d'indice permet de conclure).

3. OK.

4. OK pour presque tous. Il faut éviter d'écrire le logarithme avec des quantités dans $\mathbb{C}$ (c'est assez dérangeant et seul le calcul permet de voir que l'expression est à valeurs dans $]\,0\,;+\infty\,[$).

5. Beaucoup d'arguments incomplets. Il faut justifier

$$\ln\left(\frac{(x^{2n}-1)(x-1)}{x+1}\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}\ln\left(x^{2n}\right)$$

pour conclure. Par ailleurs, on ne peut pas écrire une limite pour $n\to+\infty$ qui dépend encore de n ...

Problème II

1. OK pour la plupart (ceux qui n'ont pas eu tous les points doivent impérativement relire le corrigé en détail !).

2. Pas si bien fait alors que ce résultat figure dans le cours. En particulier, le fait que le crochet soit fini dans l'intégration par parties a été considéré comme allant de soi, ce qui n'est pas le cas.

3.(a) Moyennement réussie. Des ouvertures artificielles de la borne en $\pi/2$ imposent un effort inutile pour I_n et A_n avec n entier. Attention, l'écriture de $\tan(t)$ impose $t\neq\dfrac{\pi}{2}$. Beaucoup ont affirmé les inégalités $\sin t\leqslant t\leqslant\tan t$ pour $t\in\left[\,0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$ sans aucune justification : il faut mentionner rapidement un argument (concavité, convexité) pour justifier l'encadrement.

3.(b) Moyennement réussie. Le calcul demandait un peu d'effort.

3.(c),(d) OK pour ceux qui ont abordé ces questions.

Problème III

Il y avait trois situations à distinguer : $\alpha > 1$, $\alpha \in]\,0\,;1\,]$ et $\alpha \leqslant 0$. Certains ont cité la convergence sans la convergence absolue pour $\alpha > 1$. Beaucoup ont traité le cas $\alpha \in]\,0\,;1\,]$ de manière partielle, soit en ne regardant que la convergence et pas la convergence absolue (qui n'a pas lieu), soit en ne considérant que le cas $\alpha = 1$. Enfin, le cas $\alpha \leqslant 0$ n'a été abordé de manière satisfaisante que dans de rares copies. La divergence est parfois détaillée dans le cas simple $\alpha = 0$ suivi d'une étude de la non convergence absolue ce qui est inutile : la convergence absolue implique la convergence donc s'il y a divergence, il n'y a pas convergence et donc pas convergence absolue.