# Feuille d'exercices n°12

## Exercice 1 (***)

Soient $f, g : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ convexes, positives vérifiant

$$\forall (x,y) \in \mathrm{I}^2 \qquad (f(x)-f(y))\,(g(x)-g(y)) \geqslant 0$$

Montrer que le produit $fg$ est convexe.

**Corrigé :** Supposons dans un premier temps $f$ et $g$ deux fois dérivables. Par dérivation, on a

$$(fg)' = f'g + fg' \qquad (fg)'' = f''g + 2f'g' + fg''$$

Comme les fonctions $f$ et $g$ ont même variation, le produit $f'g'$ est positif et tous les autres termes intervenant dans $(fg)''$ sont positifs d'où la convexité de $fg$. Vérifions que le résultat a lieu sans l'hypothèse de dérivabilité. Soit $(x,y) \in \mathrm{I}^2$. On pose

$$\forall \lambda \in [\,0\,;1\,] \qquad \Delta(\lambda) = \lambda fg(x) + (1-\lambda)fg(y) - fg(\lambda x + (1-\lambda)y)$$

En faisant le produit des inégalités de convexité pour $f$ et $g$ qui sont positives, on obtient pour $\lambda \in [\,0\,;1\,]$

$$\Delta(\lambda) \geqslant \lambda fg(x) + (1-\lambda)fg(y) - (\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y))\,(\lambda g(x) + (1-\lambda)g(y))$$

On développe, on factorise et on obtient

$$\Delta(\lambda) \geqslant \lambda(1-\lambda)\,(fg(x) + fg(y) - f(x)g(y) - f(y)g(x))$$

Enfin, en observant l'égalité

$$(fg(x) + fg(y) - f(x)g(y) - f(y)g(x)) = (f(x)-f(y))\,(g(x)-g(y))$$

On obtient $$\Delta(\lambda) \geqslant \lambda(1-\lambda)\,(f(x)-f(y))\,(g(x)-g(y))$$

Comme les fonctions $f$ et $g$ ont même variations, le produit $(f(x)-f(y))\,(g(x)-g(y))$ est positif et on obtient

$$\forall \lambda \in [\,0\,;1\,] \qquad \Delta(\lambda) \geqslant 0$$

Autrement dit $$\boxed{\text{Le produit } fg \text{ est convexe.}}$$

## Exercice 2 (***)

Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Pour X variable aléatoire, on définit *l'entropie* de X notée $\mathrm{H(X)}$ par

$$\mathrm{H(X)} = -\sum_{x \in \mathrm{X}(\Omega)} \mathbb{P}(\mathrm{X}=x) \ln \mathbb{P}(\mathrm{X}=x)$$

avec pour convention $0 \ln 0 = 0$. Intuitivement, l'entropie correspond à la quantité d'information délivrée par la variable aléatoire X ou encore à l'incertitude (ou désordre) liée aux valeurs prises par X.

1. Montrer $$0 \leqslant \mathrm{H(X)} \leqslant \ln \mathrm{Card}\ \mathrm{X}(\Omega)$$

2. Montrer $$\mathrm{H(X)} = 0 \iff \exists a \in \mathrm{X}(\Omega) \quad | \quad \mathbb{P}(\mathrm{X} = a) = 1$$

3. Montrer $$\mathrm{H(X)} = \ln \mathrm{Card}\ \mathrm{X}(\Omega) \iff \mathrm{X} \sim \mathscr{U}_{\mathrm{X}(\Omega)}$$

**Corrigé :** 1. La minoration est immédiate. Notons $n = \mathrm{Card}\ \mathrm{X}(\Omega)$. Posons $f(u) = -u \ln u$ pour $u > 0$. On a $f$ dérivable et $f'(u) = -(\ln u + 1)$ pour $u > 0$ d'où $f'$ décroissante et par conséquent $f$ concave. En considérant la tangente en 1 et avec la convention $0 \ln 0 = 0$, on obtient

$$\forall u \geqslant 0 \qquad -u \ln u \leqslant 1 - u$$

On l'applique à $n\mathbb{P}(\mathrm{X} = x)$ pour $x \in \mathrm{X}(\Omega)$ et il vient

$$\forall x \in \mathrm{X}(\Omega) \qquad -n\mathbb{P}(\mathrm{X} = x)\left(\ln n + \ln \mathbb{P}(\mathrm{X} = x)\right) \leqslant 1 - n\mathbb{P}(\mathrm{X} = x)$$

D'où $$-n \ln n \underbrace{\sum_{x \in \mathrm{X}(\Omega)} \mathbb{P}(\mathrm{X} = x)}_{=1} + n\mathrm{H(X)} \leqslant \underbrace{\sum_{x \in \mathrm{X}(\Omega)} 1}_{=n} - n \underbrace{\sum_{x \in \mathrm{X}(\Omega} \mathbb{P}(\mathrm{X} = x)}_{=1} = n - n = 0$$

ce qui prouve $\mathrm{H(X)} \leqslant \ln n$ autrement dit

$$\boxed{0 \leqslant \mathrm{H(X)} \leqslant \ln \mathrm{Card}\ \mathrm{X}(\Omega)}$$

2. Supposons qu'il existe $a \in \mathrm{X}(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(\mathrm{X} = a) = 1$. Par conséquent

$$\forall x \in \mathrm{X}(\Omega) \setminus \{a\} \qquad 0 \leqslant \mathbb{P}(\mathrm{X} = x) \leqslant \mathbb{P}(\mathrm{X} \neq 1) = 1 - \mathbb{P}(\mathrm{X} = a) = 0$$

Ainsi $$\begin{aligned} \mathrm{H(X)} &= -\sum_{x \in \mathrm{X}(\Omega)} \mathbb{P}(\mathrm{X} = x) \times \ln \mathbb{P}(\mathrm{X} = x) \\ &= -\mathbb{P}(\mathrm{X} = a) \underbrace{\ln \mathbb{P}(\mathrm{X} = a)}_{=0} - \sum_{x \in \mathrm{X}(\Omega) \setminus \{a\}} \underbrace{\mathbb{P}(\mathrm{X} = x) \ln \mathbb{P}(\mathrm{X} = x)}_{=0} = 0 \end{aligned}$$

Réciproquement, supposons $\mathrm{H(X)} = 0$. On a

$$\mathrm{H(X)} = \sum_{x \in \mathrm{X}(\Omega)} \underbrace{-\mathbb{P}(\mathrm{X} = x) \times \ln \mathbb{P}(\mathrm{X} = x)}_{\geqslant 0}$$

Il s'agit d'une somme de termes positifs donc H(X) est nulle si et seulement chaque terme de la somme est nul et par suite

$$\forall x \in \mathrm{X}(\Omega) \qquad \mathbb{P}(\mathrm{X} = x) > 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{P}(\mathrm{X} = x) = 1$$

Or la famille $(\{\mathrm{X} = x\})_{x \in \mathrm{X}(\Omega)}$ forme un système complet d'événements donc $\sum_{x \in \mathrm{X}(\Omega)} \mathbb{P}(\mathrm{X} = x) = 1$ donc il existe nécessairement $a \in \mathrm{X}(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(\mathrm{X} = a) > 0$ et par conséquent $\mathbb{P}(\mathrm{X} = a) = 1$. On a donc montré

$$\boxed{\mathrm{H(X)} = 0 \iff \exists a \in \mathrm{X}(\Omega) \quad | \quad \mathbb{P}(\mathrm{X} = a) = 1}$$

3. Notons $n = \mathrm{Card}\ \mathrm{X}(\Omega)$. Supposons $\mathrm{X} \sim \mathscr{U}_{\mathrm{X}(\Omega)}$. Il vient

$$\mathrm{H(X)} = -\sum_{x \in \mathrm{X}(\Omega)} \frac{1}{n} \ln\left(\frac{1}{n}\right) = -\ln\left(\frac{1}{n}\right) = \ln n$$

Réciproquement, supposons $\mathrm{H(X)} = \ln n$. En considérant que l'inégalité de la question 1 est une égalité, on obtient

$$\sum_{x \in \mathrm{X}(\Omega)} \left[-n\mathbb{P}(\mathrm{X} = x) \ln\left(n\mathbb{P}(\mathrm{X} = x)\right) - \left(1 - n\mathbb{P}(\mathrm{X} = x)\right)\right] = 0$$

et d'après l'inégalité $-u \ln u \leqslant 1 - u$ pour $u \geqslant 0$, les termes de la somme sont négatifs d'où

$$\forall x \in \mathrm{X}(\Omega) \qquad -n\mathbb{P}(\mathrm{X}=x)\ln\left(n\mathbb{P}(\mathrm{X}=x)\right) = 1 - n\mathbb{P}(\mathrm{X}=x)$$

Or l'inégalité $-u\ln u \leqslant 1-u$ est une égalité pour $u \geqslant 0$ si et seulement si $u=1$ (faire une étude de fonctions) d'où

$$\forall x \in \mathrm{X}(\Omega) \qquad n\mathbb{P}(\mathrm{X}=x) = 1$$

Ainsi $$\boxed{\mathrm{H}(\mathrm{X}) = \ln \operatorname{Card} \mathrm{X}(\Omega) \iff \mathrm{X} \sim \mathscr{U}_{\mathrm{X}(\Omega)}}$$

## Exercice 3 (***)

Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ avec $\deg \mathrm{P} \geqslant 1$. L'ensemble des racines de $\mathrm{P}'$ est contenu dans l'enveloppe convexe des racines de P.

**Corrigé :** On écrit $\mathrm{P} = \prod\limits_{i=1}^{r}(\mathrm{X}-\lambda_i)^{m_i}$ écriture scindée dans $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$ avec les $\lambda_i$ racines de P. On a

$$\frac{\mathrm{P}'}{\mathrm{P}} = \sum_{i=1}^{r}\frac{m_i}{\mathrm{X}-\lambda_i}$$

Soit $\alpha$ une racine de $\mathrm{P}'$ non racine de P (sinon, c'est trivial). On obtient, en multipliant par le conjugué puis en conjuguant l'expression finale

$$\mathrm{P}'(\alpha) = 0 \iff \sum_{i=1}^{r}\frac{m_i}{\alpha-\lambda_i} = 0 \iff \sum_{i=1}^{r}\frac{m_i(\alpha-\lambda_i)}{|\alpha-\lambda_i|^2} = 0$$

On pose $$\mathrm{M} = \sum_{i=1}^{r}\frac{m_i}{|\alpha-\lambda_i|^2} \quad \text{et} \quad \forall i \in [\![ 1\,;\,r ]\!] \qquad \mu_i = \frac{1}{\mathrm{M}}\frac{m_i}{|\alpha-\lambda_i|^2}$$

On a $$\alpha = \sum_{i=1}^{r}\mu_i\lambda_i \quad \text{avec} \quad \forall i \in [\![ 1\,;\,r ]\!] \qquad \mu_i \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{r}\mu_i = 1$$

Ainsi

$$\boxed{\text{L'ensemble des racines de } \mathrm{P}' \text{ est contenu dans l'enveloppe convexe des racines de P.}}$$

**Remarque :** Il s'agit du théorème de *Gauss-Lucas*.

## Exercice 4 (***)

Soit E un $\mathbb{R}$-ev. Pour $\mathrm{X} \subset \mathrm{E}$, on définit l'*enveloppe convexe* de X par

$$\operatorname{Conv}(\mathrm{X}) = \bigcap_{\mathrm{K} \text{ convexe } \supset \mathrm{X}} \mathrm{K}$$

1. Justifier qu'il s'agit du plus petit convexe contenant X.
2. Montrer que l'enveloppe convexe de X est l'ensemble des combinaisons convexes de X, *i.e.*

$$\operatorname{Conv}(\mathrm{X}) = \left\{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i, n \geqslant 1, (x_i)_{i\in[\![ 1\,;\,n ]\!]} \in \mathrm{X}^n, (\alpha_i)_{i\in[\![ 1\,;\,n ]\!]} \in \mathbb{R}_+^n \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n}\alpha_i = 1\right\}$$

**Corrigé :** 1. Comme une intersection de convexes est un convexe, l'ensemble $\operatorname{Conv}(\mathrm{X})$ est un convexe et il est, par définition, inclus dans tout convexe de E contenant X d'où

$$\boxed{\text{L'enveloppe convexe de X est le plus petit convexe contenant X.}}$$

2. Soient $x, y$ des combinaisons convexes de X, c'est-à-dire

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \quad \text{et} \quad y = \sum_{j=1}^{m} \mu_j y_j$$

avec $n, m$ entiers non nuls, les $\alpha_i, \mu_j \geqslant 0$ vérifiant $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \sum_{j=1}^{m} \mu_j = 1$ et les $x_i, y_j$ dans X. Pour $\lambda \in [\,0\,;1\,]$, on a

$$\lambda x + (1-\lambda) y = \sum_{i=1}^{n} \lambda \alpha_i x_i + \sum_{j=1}^{m} (1-\lambda) \mu_j y_j$$

Les scalaires $\lambda\alpha_i, (1-\lambda)\mu_j$ sont positifs et $\sum_{i=1}^{n} \lambda\alpha_i + \sum_{j=1}^{m} (1-\lambda)\mu_j = 1$ ce qui prouve que l'ensemble des combinaisons convexes de X est un convexe et qui contient clairement X. Ainsi, l'enveloppe convexe est contenue dans l'ensemble des combinaisons convexes de X. Puis, comme l'enveloppe convexe de X est convexe, elle est égale à l'ensemble des combinaisons convexes de ses vecteurs. Ainsi, l'enveloppe convexe contient l'ensemble des combinaisons convexes de X. On conclut

$$\boxed{\mathrm{Conv}(\mathrm{X}) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i, n \geqslant 1, (x_i)_{i \in [\![ 1\,;n ]\!]} \in \mathrm{X}^n, (\alpha_i)_{i \in [\![ 1\,;n ]\!]} \in \mathbb{R}_+^n \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \right\}}$$

## Exercice 5 (***)

Soit $f : [\,0\,;1\,] \to \mathbb{R}$ convexe dérivable. Montrer

$$0 \leqslant \frac{f(0)+f(1)}{2} - \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{f'(1)-f'(0)}{8}$$

**Corrigé :** Par convexité, le graphe de $f$ est sous la corde entre 0 et 1 d'où

$$\forall t \in [\,0\,;1\,] \qquad f(t) \leqslant f(0) + t\,(f(1) - f(0))$$

Et après intégration

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 (f(0) + t\,(f(1) - f(0)))\,\mathrm{d}t = \frac{f(1)+f(0)}{2}$$

Toujours par convexité, le graphe de $f$ se situant au dessus des tangentes prises en 0 et 1, on a

$$\forall t \in \left[0\,;\frac{1}{2}\right] \qquad f(t) \geqslant f(0) + f'(0)t \quad \text{et} \quad \forall t \in \left[\frac{1}{2}\,;1\right] \qquad f(t) \geqslant f(1) + f'(1)(t-1)$$

Ainsi, après intégration

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t &\geqslant \int_0^{\frac{1}{2}} (f(0) + f'(0)t)\,\mathrm{d}t + \int_{\frac{1}{2}}^1 (f(1) + f'(1)(t-1))\,\mathrm{d}t \\ &\geqslant \frac{f(0)+f(1)}{2} + \frac{f'(0)-f'(1)}{8} \end{aligned}$$

On conclut $\boxed{0 \leqslant \frac{f(0)+f(1)}{2} - \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{f'(1)-f'(0)}{8}}$

## Exercice 6 (****)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe dérivable.

1. Montrer que $g(x) = f(x) - xf'(x)$ admet une limite (finie ou infinie) pour $x \to +\infty$.

2. On suppose que $g$ admet une limite finie $p$ pour $x \to +\infty$. Montrer que $\dfrac{f(x)}{x}$ et $f'(x)$ admettent une même limite finie $m$ pour $x \to +\infty$.

3. Montrer alors $$f(x) - mx - p \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

**Corrigé :** 1. En supposant $f$ deux fois dérivable, on trouve $g'(x) = -xf''(x) \leqslant 0$ pour $x \geqslant 0$. Montrons ce résultat avec les hypothèses du sujet. Soit $y > x \geqslant 0$. On a

$$g(y) - g(x) = \underbrace{f(y) + (x-y)f'(y) - f(x)}_{\leqslant 0} + x\underbrace{[f('(x) - f'(y)]}_{\leqslant 0}$$

La première inégalité résulte de la position graphe/tangente en $y$ et la deuxième vient par croissance de $f'$.

On en déduit $$\forall y \geqslant x \geqslant 0 \qquad g(y) - g(x) \leqslant 0$$

Ainsi, la fonction $g$ décroît sur $[\,0\,;+\infty\,[$ et d'après le théorème de limite monotone

$$\boxed{\text{La fonction } g \text{ admet une limite finie ou infinie en } +\infty.}$$

2. Posons $$\forall x > 0 \qquad \varphi(x) = \frac{f(x) - p}{x} \quad \text{et} \quad \psi(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x}$$

Par dérivation, on a

$$\forall x > 0 \qquad \varphi'(x) - \frac{1}{x^2}\,[f(x) - xf'(x) - p] = -\frac{g(x) - p}{x^2}$$

et $$\forall x > 0 \qquad \psi'(x) = -\frac{1}{x^2}\,[f(x) - xf'(x) - f(0)] = -\frac{g(x) - f(0)}{x^2}$$

La fonction $g$ étant décroissante, on a $p \leqslant g(x) \leqslant g(0)$ pour tout $x \geqslant 0$ on en déduit

$$\forall x > 0 \qquad \varphi'(x) \leqslant 0 \quad \text{et} \quad \psi'(x) \geqslant 0$$

et on a également $$\forall x > 0 \qquad \psi(x) \leqslant \varphi(x)$$

Ainsi $$\forall x \geqslant 1 \qquad \psi(1) \leqslant \psi(x) \leqslant \varphi(x) \leqslant \varphi(1)$$

Par limite monotone, les fonctions $\varphi$ et $\psi$ admettent donc des limites finies en $+\infty$. Enfin, on a

$$\forall x > 0 \qquad \varphi(x) - \psi(x) = \frac{f(0) - p}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

On en déduit que les fonctions $\varphi$ et $\psi$ admettent une même limite finie $m$ en $+\infty$. Ainsi, on obtient pour $x > 0$

$$\frac{f(x)}{x} = \varphi(x) + \frac{p}{x} \underset{x\to+\infty}{=} m + \mathrm{o}(1) \quad \text{et} \quad f'(x) = \frac{f(x)}{x} - \frac{g(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{=} m + \mathrm{o}(1) + \frac{p + \mathrm{o}(1)}{x}$$

On conclut

$$\boxed{\text{Les fonctions } \frac{f(x)}{x} \text{ et } f'(x) \text{ admettent une même limite finie } m \text{ pour } x \to +\infty.}$$

**Remarque :** On a mis en œuvre une version continue du résultat des suites adjacentes.

**Variantes :** (a) Avec des hypothèses un peu renforcées, on peut procéder différemment, sans l'introduction des fonctions $\varphi$ et $\psi$ qui n'est pas complètement évidente. Supposons $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

On pose $$\forall x > 0 \qquad h(x) = \frac{f(x)}{x}$$

La fonction $h$ est dérivable sur $]\,0\,;+\infty\,[$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas et par dérivation

$$\forall x > 0 \qquad h'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

Par hypothèse, il existe $\mathrm{M} \geqslant 0$ et tel que $|g(x)| \leqslant \mathrm{M}$ pour $x \geqslant 1$. Par suite

$$\forall x \geqslant 1 \qquad |h(x) - h(1)| = \left| \int_1^x h'(t)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \int_1^x \frac{\mathrm{M}\mathrm{d}t}{t^2} \leqslant \mathrm{M}$$

Par conséquent, la fonction $h$ n'admet pas de limite infinie en $+\infty$. Or, on a

$$g(x) \underset{+\infty}{=} \mathrm{O}(1) \quad \Longrightarrow \quad h(x) - f'(x) = \frac{g(x)}{x} \underset{+\infty}{=} \mathrm{o}(1)$$

et comme $f'$ croît par convexité de $f$, celle-ci admet une limite finie ou infinie en $+\infty$ d'après le théorème de limite monotone et de même pour $h$ d'après l'égalité précédente. On retrouve alors le résultat attendu.

(b) On peut conserver l'idée du contrôle de $h$ avec seulement l'hypothèse de dérivabilité de $f$ en suivant un démarche discrétisée. Pour $x \geqslant 1$, on décompose

$$h(x) - h(1) = \sum_{k=1}^{\lfloor x \rfloor - 1} [h(k+1) - h(k)] + h(x) - h(\lfloor x \rfloor)$$

D'après l'inégalité des accroissements finis, on a

$$\forall k \geqslant 1 \qquad |h(k+1) - h(k)| \leqslant \frac{\mathrm{M}}{k^2} \quad \text{et} \quad \forall x \geqslant 1 \qquad |h(x) - h(\lfloor x \rfloor)| \leqslant \frac{\mathrm{M}}{\lfloor x \rfloor^2}$$

Ainsi
$$\forall x \geqslant 1 \qquad |h(x) - h(1)| \leqslant \sum_{k=1}^{\lfloor x \rfloor} \frac{\mathrm{M}}{k^2} \underset{x \to +\infty}{=} \mathrm{O}(1)$$

On conclut comme précédemment.

3. La fonction $\varphi$ décroît et $\varphi(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} m$ d'où $\varphi(x) \geqslant m$ pour tout $x > 0$ et par conséquent

$$\forall x > 0 \qquad f(x) - mx \geqslant p$$

Par ailleurs, comme $f'$ croît et tend vers $m$ en $+\infty$, on obtient

$$\forall x > 0 \qquad p \leqslant f(x) - mx \leqslant f(x) - xf'(x)$$

Par encadrement
$$\boxed{f(x) - mx - p \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0}$$

## Exercice 7 (****)

Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension $n$ et $\mathrm{X} \subset \mathrm{E}$. Montrer que tout élément de Conv(X) peut s'écrire comme combinaison convexe de $n+1$ éléments de X.

**Corrigé :** Soit $x \in \mathrm{Conv(X)}$. On a $x = \sum\limits_{i=1}^{p} \alpha_i x_i$ avec les $\alpha_i \geqslant 0$ tels que $\sum\limits_{i=1}^{p} \alpha_i = 1$ et les $x_i$ dans X. On suppose $p > n+1$. Par suite, la famille $(x_2 - x_1, x_3 - x_1, \ldots, x_p - x_1)$ est liée. Il existe des réels $\beta_i$ non tous nuls tels que $\sum\limits_{i=2}^{p} \beta_i (x_i - x_1) = 0$. On pose $\beta_1 = -\sum\limits_{i=2}^{p} \beta_i$. Ainsi, on a $\sum\limits_{i=1}^{p} \beta_i x_i = 0$ et par suite

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad x = \sum_{i=1}^{p} (\alpha_i + t\beta_i) x_i$$

Comme les $\beta_i$ ne sont pas tous nuls et de somme nulle, l'un d'entre eux est strictement négatif. On pose

$$\tau = \min \left\{ -\frac{\alpha_i}{\beta_i}, \beta_i < 0 \right\} \quad \text{et} \quad \forall i \in [\![ 1 ; p ]\!] \qquad \lambda_i = \alpha_i + \tau\beta_i$$

Si $\beta_i \geqslant 0$, alors $\lambda_i \geqslant 0$ comme somme de termes positifs. Si $\beta_i < 0$ alors $-\dfrac{\alpha_i}{\beta_i} \geqslant \tau \iff \lambda_i \geqslant 0$. Ainsi, les $\lambda_i$ sont positifs, de somme égale à 1 et il existe un $i_0$ tel que $\lambda_{i_0}$ est nul (l'indice qui réalise le minimum dans la définition de $\tau$). Il vient

$$x = \sum_{i \in [\![ 1 ; p ]\!] \smallsetminus \{i_0\}} \lambda_i x_i$$

On est donc passé pour l'écriture de $x$ d'une combinaison convexe de $p$ éléments à une combinaison convexe de $p - 1$ éléments. En itérant, ce procédé, on se ramène à $n + 1$ éléments. On conclut

$$\boxed{\text{Tout élément de Conv(X) peut s'écrire comme combinaison convexe de } n+1 \text{ éléments de X.}}$$

**Remarque :** Il s'agit du *théorème de Carathéodory.*