ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Feuille d'exercices n°10

Exercice 1 (*)

Établir $$\forall x \in [\,0\,;1\,] \qquad \sin(\pi x) \leqslant \pi(1-x)$$

Exercice 2 (*)

Établir $$\forall x \in \left[\,0\,;\frac{\pi}{2}\,\right[\qquad x \leqslant \tan x$$

Exercice 3 (*)

Soit $f \in \mathscr{C}^2(]\,0\,;+\infty\,[\,,\mathbb{R})$ et $g :]\,0\,;+\infty\,[\, \to \mathbb{R}, x \mapsto xf\left(\frac{1}{x}\right)$. Montrer que f est convexe si et seulement si g l'est.

Exercice 4 (*)

Que peut-on dire de la somme deux fonctions convexes ? de leur produit ?

Exercice 5 (*)

1. Une composée de fonctions convexes est-elle convexe ?
2. La composée d'une fonction croissante convexe avec une fonction convexe est-elle convexe ?

Exercice 6 (*)

Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, X une variable aléatoire réelle et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe.
Montrer $$f\left(\mathbb{E}(\mathrm{X})\right) \leqslant \mathbb{E}(f(\mathrm{X}))$$

Exercice 7 (*)

Soit $f \in \mathscr{C}_{pm}([\,a\,;b\,]\,,\mathbb{R})$, $g \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et g convexe. Montrer
$$g\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f\right) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b g \circ f$$

Exercice 8 (*)

Soient $x_1, \ldots, x_n \geqslant 0$. Montrer $$\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i} \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}$$

Exercice 9 (*)

Soit $\alpha \geqslant 1$. Établir $$\forall x \geqslant 0 \qquad 1 - x^\alpha \leqslant \alpha(1-x)$$

Exercice 10 (*)

Soit E un $\mathbb{R}$-ev. Montrer qu'une intersection de parties de E convexes est convexe.

Exercice 11 (**)

Soit $f \in \mathscr{C}^1([\,a\,;b\,],\mathbb{R})$ convexe. Montrer

$$(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

Exercice 12 (**)

Établir $$\forall x \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right] \qquad 1-\cos x \geqslant \frac{x^2}{\pi}$$

Exercice 13 (**)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe majorée. Montrer que f est constante.
Le résultat subsiste-t-il pour $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$?

Exercice 14 (**)

Soit p entier non nul et $(u_n)_n$ suite de réels positifs telle que $\sum u_n$ converge. Montrer que la série $\sum \left(\prod\limits_{i=0}^{p-1} u_{n+i}\right)^{\frac{1}{p}}$ converge.