ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

# Feuille d'exercices n°11

## Exercice 1 (****)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe dérivable.

1. Montrer que $g(x) = f(x) - xf'(x)$ admet une limite (finie ou infinie) pour $x \to +\infty$.
2. On suppose que $g$ admet une limite finie $p$ pour $x \to +\infty$. Montrer que $\dfrac{f(x)}{x}$ et $f'(x)$ admettent une même limite finie $m$ pour $x \to +\infty$.
3. Montrer alors $$f(x) - mx - p \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

## Exercice 2 (***)

Soit $\mathrm{M}_1 \dots \mathrm{M}_n$ (avec $n > 2$) un polygone inscrit dans le cercle unité avec $\mathrm{M}_1$ de coordonnées $(1, 0)$. Montrer que ce polygone est de périmètre maximal s'il est régulier.

## Exercice 3 (***)

Soit $f : \mathbb{R} \to \left]0\,;+\infty\right[$. Montrer

$$\ln\circ f \text{ convexe} \iff \forall \alpha > 0 \qquad f^\alpha \text{ convexe}$$

## Exercice 4 (***)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe. Montrer que $f$ est continue.

## Exercice 5 (***)

Soit $x_1, \dots, x_n$ des réels positifs.

1. Établir $$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$
2. Montrer que cette inégalité est une égalité si et seulement si $x_1 = \ldots = x_n$.

## Exercice 6 (****)

Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

Montrer que $f$ est convexe.

## Exercice 7 (Hölder, Minkowski ****)

Soient $p, q > 1$ tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, I un intervalle et $f, g$ continues sur I, positives.

1. Soients $a, b \geqslant 0$. Montrer

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

2. On suppose $f^p$ et $g^q$ intégrables sur I. Montrer que $fg$ est intégrable sur I et

$$\int_{\mathrm{I}} fg \leqslant \left(\int_{\mathrm{I}} f^p\right)^{1/p} \left(\int_{\mathrm{I}} g^q\right)^{1/q}$$

3. On suppose $f^p$ et $g^p$ intégrables sur I. Montrer que $(f+g)^p$ est intégrable sur I et

$$\left(\int_{\mathrm{I}} (f+g)^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\int_{\mathrm{I}} f^p\right)^{1/p} + \left(\int_{\mathrm{I}} g^p\right)^{1/p}$$