ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Feuille d'exercices n°12

Exercice 1 (***)

Soient $f, g : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ convexes, positives vérifiant

$$\forall (x, y) \in \mathrm{I}^2 \qquad (f(x) - f(y))\,(g(x) - g(y)) \geqslant 0$$

Montrer que le produit fg est convexe.

Indications : Pour $(x, y) \in \mathrm{I}^2$, poser

$$\forall \lambda \in [\,0\,;1\,] \qquad \Delta(\lambda) = \lambda fg(x) + (1-\lambda) fg(y) - fg(\lambda x + (1-\lambda)y)$$

puis minorer $\Delta(\lambda)$ en utilisant les hypothèses portant sur f et g.

Exercice 2 (***)

Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Pour X variable aléatoire, on définit *l'entropie* de X notée H(X) par

$$\mathrm{H}(\mathrm{X}) = -\sum_{x \in \mathrm{X}(\Omega)} \mathbb{P}(\mathrm{X} = x) \ln \mathbb{P}(\mathrm{X} = x)$$

avec pour convention $0 \ln 0 = 0$. Intuitivement, l'entropie correspond à la quantité d'information délivrée par la variable aléatoire X ou encore à l'incertitude (ou désordre) liée aux valeurs prises par X.

1. Montrer $$0 \leqslant \mathrm{H}(\mathrm{X}) \leqslant \ln \mathrm{Card}\ \mathrm{X}(\Omega)$$
2. Montrer $$\mathrm{H}(\mathrm{X}) = 0 \iff \exists a \in \mathrm{X}(\Omega) \quad | \quad \mathbb{P}(\mathrm{X} = a) = 1$$
3. Montrer $$\mathrm{H}(\mathrm{X}) = \ln \mathrm{Card}\ \mathrm{X}(\Omega) \iff \mathrm{X} \sim \mathscr{U}_{\mathrm{X}(\Omega)}$$

Indications : 1. Montrer $-u \ln u \leqslant 1 - u$ pour $u \geqslant 0$ puis l'appliquer à $n\mathbb{P}(\mathrm{X} = x)$ avec $n = \mathrm{Card}\ \mathrm{X}(\Omega)$.
2. Pour le sens direct, remarquer qu'il s'agit d'une somme de termes positifs.
3. Pour le sens direct, reprendre le calcul effectué à la question 1 en remplaçant l'inégalité par une égalité et utiliser l'inégalité fournie en indication pour la question 1.

Exercice 3 (***)

Soit E un $\mathbb{R}$-ev. Pour $\mathrm{X} \subset \mathrm{E}$, on définit l'*enveloppe convexe* de X par

$$\mathrm{Conv}(\mathrm{X}) = \bigcap_{\mathrm{K \text{ convexe } \supset X}} \mathrm{K}$$

1. Justifier qu'il s'agit du plus petit convexe contenant X.
2. Montrer que l'enveloppe convexe de X est l'ensemble des combinaisons convexes de X, *i.e.*
$$\mathrm{Conv}(\mathrm{X}) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i, n \geqslant 1, (x_i)_{i \in [\![1\,;n]\!]} \in \mathrm{X}^n, (\alpha_i)_{i \in [\![1\,;n]\!]} \in \mathbb{R}_+^n \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \right\}$$

Indications : 2.(b) Pour établir que l'enveloppe convexe contient l'ensemble des combinaisons convexes, utiliser une caractérisation des parties convexes avec des barycentres à coefficients positifs.

Exercice 4 (***)

Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ avec $\deg \mathrm{P} \geqslant 1$. L'ensemble des racines de P' est contenu dans l'enveloppe convexe des racines de P.

Indications : Écrire la décomposition en éléments simples de $\dfrac{\mathrm{P}'}{\mathrm{P}}$ puis évaluer en α racine de P', multiplier par les conjugués au dénominateur et conjuguer l'expression finale.

Exercice 5 (***)

Soit $f : [\,0\,;1\,] \to \mathbb{R}$ convexe dérivable. Montrer

$$0 \leqslant \frac{f(0)+f(1)}{2} - \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{f'(1)-f'(0)}{8}$$

Indications : Considérer les positions graphe/corde, graphe/tangente sur les intervalles $[\,0\,;1\,]$, $\left[\,0\,;\dfrac{1}{2}\right]$ et $\left[\,\dfrac{1}{2}\,;1\right]$.

Exercice 6 (****)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe dérivable.

1. Montrer que $g(x) = f(x) - xf'(x)$ admet une limite (finie ou infinie) pour $x \to +\infty$.
2. On suppose que g admet une limite finie p pour $x \to +\infty$. Montrer que $\dfrac{f(x)}{x}$ et $f'(x)$ admettent une même limite finie m pour $x \to +\infty$.
3. Montrer alors $$f(x) - mx - p \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

Indications : 1. En supposant f deux fois dérivable, conjecturer la variation de g puis considérer $g(y) - g(x)$ pour $y > x \geqslant 0$ et exploiter la convexité de f.
2. Considérer les fonctions

$$\forall x > 0 \qquad \varphi(x) = \frac{f(x)-p}{x} \quad \text{et} \quad \psi(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x}$$

Déterminer leurs monotonies puis les comparer et conclure sur leur comportement asymptotique.
3. Utiliser la fonction φ et la monotonie de f'.

Exercice 7 (****)

Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension n et $\mathrm{X} \subset \mathrm{E}$. Montrer que tout élément de $\mathrm{Conv}(\mathrm{X})$ peut s'écrire comme combinaison convexe de $n+1$ éléments de X.

Indications : Considérer $x \in \mathrm{Conv}(\mathrm{X})$ avec $x = \sum\limits_{i=1}^{p} \alpha_i x_i$ combinaison convexe de p éléments pour $p > n+1$. Observer que la famille $(x_2 - x_1, \ldots, x_p - x_1)$ est liée puis en déduire des scalaires β_i tels que $\sum\limits_{i=1}^{p} \beta_i x_i = 0$. Faire un choix adapté de t pour que, dans l'écriture $\sum\limits_{i=1}^{p} (\alpha_i + t\beta_i) x_i$, les β_i soient positifs et l'un d'eux nuls.