ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025 03/10/2024

Devoir en temps libre n°4

Problème I

Soit E un $\mathbb{K}$-ev, G un sous-groupe fini de GL(E) de cardinal égal à n et soit F un sev stable par tout élément de G, *i.e.*

$$\forall g \in \mathrm{G} \qquad g(\mathrm{F}) \subset \mathrm{F}$$

Soit p un projecteur de E tel que $\mathrm{Im}\, p = \mathrm{F}$. On pose $\quad q = \dfrac{1}{n}\sum_{g\in\mathrm{G}} g \circ p \circ g^{-1}$.

1. Établir $p \circ q = q$ et $q \circ p = p$.
2. Montrer que q est un projecteur.
3. Montrer que $\mathrm{Im}\, q = \mathrm{F}$.
4. Montrer qu'il existe un sev H supplémentaire de F et stable par tout élément de G.

Problème II

Soit n entier non nul. Pour $k \in [\![0\,;\, n]\!]$, on note $\mathrm{S}_{n,k}$ le nombre de surjections de $[\![1\,;\, n]\!]$ dans $[\![1\,;\, k]\!]$ (avec la convention $[\![1\,;\, 0]\!] = \varnothing$). On pose

$$\tau\colon \begin{cases} \mathbb{R}_n[\mathrm{X}] \longrightarrow \mathbb{R}_n[\mathrm{X}] \\ \mathrm{P}(\mathrm{X}) \longmapsto \mathrm{P}(\mathrm{X}+1) \end{cases}$$

et $\mathscr{C} = (1, \mathrm{X}, \ldots, \mathrm{X}^n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

1. Justifier que τ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ et préciser $\mathrm{T} = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}\tau$.
2. Justifier que τ est un automorphisme et déterminer $\mathrm{mat}_{\mathscr{C}}\tau^{-1}$.
3. Pour $p \in [\![0\,;\, n]\!]$, établir $\qquad p^n = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k}\mathrm{S}_{n,k}$
4. Soit $(u_0, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Déterminer $(v_0, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que
$$\begin{pmatrix} v_0 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \mathrm{T}^\top \begin{pmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$
puis déterminer $(u_0, \ldots, u_n)$ en fonction de $(v_0, \ldots, v_n)$.
5. Déterminer une formule donnant $\mathrm{S}_{n,k}$ pour $k \in [\![0\,;\, n]\!]$.

Problème III

Soit $\mathrm{P} = \sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{X}^k \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$ et de degré $n \geqslant 2$.

1. Étudier la concavité de la fonction $x \mapsto \ln |\mathrm{P}(x)|$ sur chacun des intervalles composant l'ensemble de définition de cette fonction.

2. En déduire $$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{P}''(x)\mathrm{P}(x) \leqslant \mathrm{P}'(x)^2$$

   puis $$\forall (x,k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N} \qquad \mathrm{P}^{(k+2)}(x)\mathrm{P}^{(k)}(x) \leqslant \mathrm{P}^{(k+1)}(x)^2$$

3. Pour $k \in [\![1 \,; n-1]\!]$, majorer $a_{k-1}a_{k+1}$ en fonction de a_k.