Corrigé du devoir en temps libre n°2

Problème I

1. On pose $$\forall (x,t) \in \mathrm{X} \times \mathrm{I} \qquad f(x,t) = \frac{1-\cos(t)}{t^2}\mathrm{e}^{-xt}$$

avec $\mathrm{X} = \mathbb{R}_+$ et $\mathrm{I} =]\,0\,;+\infty\,[$. Vérifions les hypothèses du théorème de continuité sous l'intégrale.
- Pour $x \in \mathrm{X}$, on a $t \mapsto f(x,t) \in \mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I},\mathbb{R})$ par théorèmes généraux.
- Pour $t \in \mathrm{I}$, on a $x \mapsto f(x,t) \in \mathscr{C}(\mathrm{X},\mathbb{R})$ par théorèmes généraux.
- Domination : On a

$$\forall (x,t) \in \mathrm{X} \times \mathrm{I} \qquad |f(x,t)| \leqslant \varphi(t) \quad \text{avec} \quad \varphi(t) = \frac{1-\cos(t)}{t^2}$$

On a $\varphi \in \mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I},\mathbb{R}_+)$ puis $\varphi(t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{t^2/2}{t^2} \xrightarrow[t\to 0]{} \dfrac{1}{2}$ et $\varphi(t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ d'où l'intégrabilité de φ sur I. Ainsi

$$\boxed{\text{La fonction F est définie, continue sur } [\,0\,;+\infty\,[.}$$

On pose $\mathrm{X}' =]\,0\,;+\infty\,[$. Vérifions les hypothèses du théorème de régularité $\mathscr{C}^2$ sous l'intégrale.

- Pour $x \in \mathrm{X}'$, on a $t \mapsto f(x,t) \in \mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I},\mathbb{R})$ et intégrable d'après la domination précédente.
- Pour $t \in \mathrm{I}$, on a $x \mapsto f(x,t) \in \mathscr{C}^2(\mathrm{X}',\mathbb{R})$ par théorèmes généraux. Par dérivation, on trouve

$$\forall (x,t) \in \mathrm{X}' \times \mathrm{I} \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -\frac{1-\cos(t)}{t}\mathrm{e}^{-xt} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = (1-\cos(t))\mathrm{e}^{-xt}$$

- Pour $x \in \mathrm{X}'$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \underset{t\to 0}{=} \frac{\mathrm{o}(t)}{t}\mathrm{e}^{-xt} \xrightarrow[t\to 0]{} 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

d'où l'intégrabilité de $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ sur I.
- Pour $x \in \mathrm{X}'$, on a $t \mapsto \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) \in \mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I},\mathbb{R})$ par théorèmes généraux.
- Domination : On procède localement pour conserver le terme avec l'exponentielle. Pour $a > 0$, on a

$$\forall (x,t) \in [\,a\,;+\infty\,[\times \mathrm{I} \qquad \left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t) \quad \text{avec} \quad \varphi(t) = 2\mathrm{e}^{-at}$$

On a $\varphi \in \mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I},\mathbb{R}_+)$ et φ intégrable sur I puisque $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a}$. Ainsi, on a F de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[\,a\,;+\infty\,[$ pour tout $a > 0$ d'où

$$\boxed{\mathrm{F} \in \mathscr{C}^2(]\,0\,;+\infty\,[\,,\mathbb{R})}$$

2. Par dérivation sous l'intégrale, on a

$$\forall x > 0 \qquad \mathrm{F}'(x) = \int_0^{+\infty} -\frac{1-\cos(t)}{t}\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$$

D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange et l'inégalité des accroissements finis, on a

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad |1-\cos(t)| \leqslant \frac{t^2}{2} \quad \text{et} \quad |1-\cos(t)| \leqslant t$$

Comme $t \mapsto \mathrm{e}^{-xt}$ est intégrable sur I (faussement impropre en 0 et critère de comparaison et Riemann en $+\infty$), on a

$$\forall x > 0 \qquad 0 \leqslant \mathrm{F}(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2x} \quad \text{et} \quad 0 \leqslant \mathrm{F}'(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}$$

Ainsi, par encadrement, on conclut

$$\boxed{\mathrm{F}(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{F}'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0}$$

3. Par dérivation sous l'intégrale, on a

$$\forall x > 0 \qquad \mathrm{F}''(x) = \int_0^{+\infty} (1-\cos(t))\,\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$$

Par linéarité car convergence des intégrales, on trouve pour $x > 0$

$$\mathrm{F}''(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} \cos(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x} - \mathrm{Re}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(x+\mathrm{i})}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x} - \mathrm{Re}\left(\frac{1}{x+\mathrm{i}}\right)$$

D'où

$$\boxed{\forall x > 0 \qquad \mathrm{F}''(x) = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}}$$

Par intégration, il vient

$$\forall x > 0 \qquad \mathrm{F}'(x) = \ln(x) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \alpha \quad \text{avec} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Or

$$\forall x > 0 \qquad \mathrm{F}'(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right) + \alpha \xrightarrow[x\to+\infty]{} \alpha = 0$$

Ainsi

$$\boxed{\forall x > 0 \qquad \mathrm{F}'(x) = \ln(x) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)}$$

4. On pose $\qquad \forall x > 0 \qquad \mathrm{G}(x) = x\ln(x) - \dfrac{1}{2}x\ln(x^2+1) - \mathrm{Arctan}\,(x) + \dfrac{\pi}{2}$

La fonction G est dérivable sur $]\,0\,;+\infty\,[$ et par dérivation, on trouve

$$\forall x > 0 \qquad \mathrm{G}'(x) = \mathrm{F}'(x)$$

d'où

$$\forall x > 0 \qquad \mathrm{F}(x) = \mathrm{G}(x) + \beta \quad \text{avec} \quad \beta \in \mathbb{R}$$

Puis

$$\begin{aligned}\forall x > 0 \qquad \mathrm{G}(x) &= -\frac{1}{2}x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) - \mathrm{Arctan}\,(x) + \frac{\pi}{2} \\ &= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)\right) - \mathrm{Arctan}\,(x) + \frac{\pi}{2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0\end{aligned}$$

ce qui prouve que $\beta = 0$. Enfin, par continuité de F en 0, on a

$$\mathrm{F}(0) = \lim_{x\to0} \mathrm{F}(x) = \lim_{x\to0} x\ln(x) - \frac{x}{2}\ln(x^2+1) - \mathrm{Arctan}\,(x) + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

Et on conclut

$$\boxed{\begin{cases}\forall x > 0 \qquad \mathrm{F}(x) = x\ln(x) - \dfrac{1}{2}x\ln(x^2+1) - \mathrm{Arctan}\,(x) + \dfrac{\pi}{2} \\ \mathrm{F}(0) = \dfrac{\pi}{2}\end{cases}}$$

Problème II

1. On pose $$\forall (x,t) \in \mathrm{X}\times\mathrm{I} \qquad f(x,t) = \frac{\ln(1+x\cos(t))}{\cos(t)}$$

avec $\mathrm{X} = [\,-1\,;1\,]$ et $\mathrm{I} = \left]\,0\,;\dfrac{\pi}{2}\,\right[$. On vérifie :
• Pour $x \in \mathrm{X}$, on a $t \mapsto f(x,t) \in \mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I},\mathbb{R})$ avec notamment un prolongement par continuité en $\dfrac{\pi}{2}$ puisque

$$\frac{\ln(1+x\cos(t))}{\cos(t)} \xrightarrow[t\to\frac{\pi}{2}]{} x$$

• Pour $t \in \mathrm{I}$, on a $x \mapsto f(x,t) \in \mathscr{C}(\mathrm{X},\mathbb{R})$ par théorèmes généraux.
• Domination : En distinguant selon le signe de x et $\cos(t)$, on obtient

$$\forall (x,t) \in \mathrm{X}\times\mathrm{I} \qquad |f(x,t)| \leqslant \varphi(t) \quad \text{avec} \quad \varphi(t) = -\frac{\ln(1-\cos(t))}{\cos(t)}$$

On a $$\varphi(t) \xrightarrow[t\to\frac{\pi}{2}]{} 1 \quad \text{et} \quad \varphi(t) \underset{t\to 0}{\sim} -\ln(t) \underset{t\to 0}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$$

d'où son intégrabilité sur I. On conclut

$$\boxed{\mathrm{F} \in \mathscr{C}([\,-1\,;1\,],\mathbb{R})}$$

2. Soit $\mathrm{X}' = \,]\,-1\,;1\,[$. On vérifie :
• Pour $x \in \mathrm{X}'$, on a $t \mapsto f(x,t) \in \mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I},\mathbb{R})$, intégrable sur I d'après la domination précédente.
• Pour $t \in \mathrm{I}$, on a $x \mapsto f(x,t) \in \mathscr{C}^1(\mathrm{X}',\mathbb{R})$. Par dérivation, on trouve

$$\forall (x,t) \in \mathrm{X}'\times\mathrm{I} \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{1}{1+x\cos(t)}$$

• Pour $x \in \mathrm{X}'$, on a $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) \in \mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I},\mathbb{R})$.
• Domination : Soit $a \in \,]\,0\,;1\,[$. On a

$$\forall (x,t) \in [\,-a\,;1\,]\times\mathrm{I} \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \psi(t) \quad \text{avec} \quad \psi(t) = \frac{1}{1-a}$$

et ψ clairement continue par morceaux et intégrable sur I. Ainsi, la fonction F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\,-a\,;1\,]$ pour tout $a \in \,]\,0\,;1\,[$ et par conséquent

$$\boxed{\mathrm{F} \in \mathscr{C}^1(]\,-1\,;1\,[\,,\mathbb{R})}$$

3. Par dérivation sous l'intégrale, on trouve

$$\forall x \in \,]\,-1\,;1\,[\qquad \mathrm{F}'(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1+x\cos(t)}$$

On effectue le changement de variable $u = \tan\left(\dfrac{t}{2}\right)$. Soit $\varphi :]\,0\,;1\,[\to \left]\,0\,;\dfrac{\pi}{2}\,\right[, u \mapsto 2\,\mathrm{Arctan}\,u$ fonction de classe $\mathscr{C}^1$, bijective, strictement croissante. On obtient par convergence et donc égalité des intégrales concernées

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1+x\cos(t)} = \int_0^1 \frac{2\,\mathrm{d}u}{1+x+(1-x)u^2}$$

Puis
$$\int_0^1 \frac{2\,\mathrm{d}u}{1+x+(1-x)u^2} = \frac{2}{1-x}\left[\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\mathrm{Arctan}\left(u\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)\right]_0^1$$
$$= \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{Arctan}\,\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

On pose
$$\forall x \in [\,-1\,;1\,] \qquad \mathrm{G}(x) = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\mathrm{Arccos}^2\, x}{2}$$

La fonction G est dérivable sur $]\,-1\,;1\,[$ comme composée de telles fonctions et par dérivation, il vient
$$\forall x \in \,]\,-1\,;1\,[\qquad \mathrm{G}'(x) = \frac{\mathrm{Arccos}\, x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Toujours par dérivation, on trouve
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\mathrm{Arctan}\,\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right] = -\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$$

D'où
$$\forall x \in \,]\,-1\,;1\,[\qquad \mathrm{Arctan}\,\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Arccos}\, x + \mathrm{C}^{\mathrm{te}}$$

et la constante d'intégration est nulle en examinant $x = 0$. On a donc
$$\forall x \in \,]\,-1\,;1\,[\qquad \mathrm{F}'(x) = \mathrm{G}'(x) \quad \text{et} \quad \mathrm{F}(0) = \mathrm{G}(0)$$

ce qui prouve que F et G coincident sur $]\,-1\,;1\,[$. Enfin, par continuité de F sur $[\,-1\,;1\,]$, on conclut
$$\boxed{\forall x \in [\,-1\,;1\,] \qquad \mathrm{F}(x) = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\mathrm{Arccos}^2\, x}{2}}$$