ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025 26/09/2024

Corrigé du devoir en temps libre n°3

Problème I

1. Notons $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{P}_n$. Pour n entier non nul, on a $\mathrm{P}_{n-1} \neq 0$ sans quoi $(\mathrm{P}_n)_n$ serait de limite nulle et

$$u_n = \frac{\mathrm{P}_n}{\mathrm{P}_{n-1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\ell}{\ell}$$

D'où $$\boxed{u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1}$$

2. Par définition, le produit $\prod(1+u_n)$ converge si et seulement si $\left(\prod\limits_{k=0}^{n} u_k\right)_n$ admet une limite finie non nulle, autrement dit, passant au logarithme, si et seulement si $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} \ln(1+u_k)\right)_n$ admet une limite finie. Par conséquent, on a

$$\prod(1+u_n) \text{ converge } \iff \sum \ln(1+u_n) \text{ converge}$$

Or, on a $\ln(1+u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ si et seulement si $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et si $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, alors il vient $\ln(1+u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$. D'après le critère des équivalents pour des séries à termes positifs, on obtient

$$\sum \ln(1+u_n) \text{ converge } \iff \sum u_n \text{ converge}$$

Et on conclut $$\boxed{\prod(1+u_n) \text{ converge } \iff \sum u_n \text{ converge}}$$

3. Comme ci-avant, on a

$$\prod(1-u_n) \text{ converge } \iff \sum \ln(1-u_n) \text{ converge}$$

On a également $\ln(1-u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ si et seulement si $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et si $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, alors il vient $\ln(1-u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -u_n$. D'après le critère des équivalents pour des séries à termes de signe constant, on obtient

$$\sum \ln(1-u_n) \text{ converge } \iff \sum u_n \text{ converge}$$

Et on conclut $$\boxed{\prod(1-u_n) \text{ converge } \iff \sum u_n \text{ converge}}$$

Problème II

1. La suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ décroît et tend vers zéro. D'après le théorème des séries alternées, on conclut

$$\boxed{\text{Pour } n \text{ entier, le reste } \mathrm{R}_n \text{ d'ordre } n \text{ est bien défini.}}$$

2. On a $$\forall k \in \mathbb{N}^* \qquad \frac{1}{k} = \int_0^1 t^k \,\mathrm{d}t$$

Par linéarité de l'intégrale, il vient pour n entier

$$\mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} = -\int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} (-t)^\ell \,\mathrm{d}t = -\int_0^1 \frac{1-(-t)^n}{1+t}\,\mathrm{d}t = -\ln(2) + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

Avec $\qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad 0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(1)$

il vient $\qquad \mathrm{S}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} -\ln(2) = \mathrm{S}$

d'où $\qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{R}_n = \mathrm{S} - \mathrm{S}_n = (-1)^{n+1}\varepsilon_n \quad$ avec $\quad \varepsilon_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t$

On a $t^{n+1} \leqslant t^n$ pour $t \in [0\,;1]$ et n entier d'où la décroissance de $(\varepsilon_n)_n$ par croissance de l'intégrale. On a déjà établi $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et par conséquent, d'après le théorème des séries alternées

$$\boxed{\text{La série } \sum \mathrm{R}_n \text{ converge.}}$$

Pour n entier, on trouve par linéarité de l'intégrale

$$\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{R}_k = -\int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n-1} (-t)^k\right) \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = -\int_0^1 \frac{1-(-t)^n}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2} + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$$

Comme précédemment, on établit $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et on conclut

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{R}_n = -\frac{1}{2}}$$

Problème III

1. On a $\qquad \forall n \geqslant 2 \qquad$
$$\begin{aligned} v_n - v_{n-1} &= \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

La série téléscopique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} [v_n - v_{n-1}]$ converge et d'après le lien suite/série téléscopique, on conclut que la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ converge, c'est-à-dire

$$\boxed{\text{Il existe } \gamma \text{ réel telle que } \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \mathrm{o}(1).}$$

2. On a établi $\qquad v_n - v_{n-1} = \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$

La série à termes positifs $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge et par sommation des relations de comparaison

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} [v_k - v_{k-1}] = \gamma - v_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}\right)$$

Par comparaison série/intégrale (à détailler), on obtient

$$\int_{n+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leqslant \int_n^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$$

d'où
$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

Ainsi
$$\boxed{v_n = \gamma + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)}$$

3. On a $\quad u_n \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(\ln(n) + \gamma + \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} \underbrace{(-1)^n\left(\dfrac{\ln(n)+\gamma}{\sqrt{n}}\right)}_{\alpha_n} + \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$

La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \alpha_n$ est alternée avec $|\alpha_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Posons $f : \left]\,0\,;+\infty\,\right[\to \mathbb{R}, t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{\sqrt{t}}$. La fonction f est dérivable avec
$$\forall t > 0 \qquad f'(t) = \frac{2-\ln(t)}{2t\sqrt{t}}$$

La fonction f décroît sur $[\,\mathrm{e}^2\,;+\infty\,[$ et par conséquent, la suite $(|\alpha_n|)_{n\geqslant \mathrm{e}^2}$ avec $|\alpha_n| = f(n) + \dfrac{\gamma}{\sqrt{n}}$ pour n entier non nul décroît elle-aussi. Ainsi, à partir d'un certain rang, le théorème des séries alternées garantit la convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 1} \alpha_n$. La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$ converge absolument d'après le critère de Riemann et on conclut
$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geqslant 1} u_n \text{ converge.}}$$