Préparation à l'interrogation n°04

1 Trigonométrie

1. $\sin(p) - \sin(q) = 2\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)$
2. $\tan(a+b) = \dfrac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$

2 Calcul intégral

1. $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$
2. $\displaystyle\int^x \mathrm{Arctan}\,(t)\,\mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{a^2+t^2}$ avec $a \neq 0$

3 Formules

1. Inégalité de Taylor-Lagrange
2. $x^n - y^n = (x-y)\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}$

4 Étude asymptotique

1. Développement limité en 0 à l'ordre $2n+1$ de $\mathrm{sh}\,(x)$;
2. Développement limité en 0 à l'ordre n de $\ln(1+x)$;
3. Développement limité en 0 à l'ordre 3 de $\sqrt{1+x}$.

5 Calcul matriciel

1. Soient $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\mathrm{B} \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. On définit $\mathrm{AB} \in \mathscr{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ par $\mathrm{AB} = (c_{i,j})$ où $c_{i,j} = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}$ pour tout $(i,j) \in [\![1\,;\,n]\!] \times [\![1\,;\,q]\!]$;
2. Soit $(\mathrm{E}_{i,j})_{(i,j)\in[\![1\,;\,n]\!]^2} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On a la relation
$$\forall (i,j,k,\ell) \in [\![1\,;\,n]\!]^4 \qquad \mathrm{E}_{i,j} \times \mathrm{E}_{k,\ell} = \delta_{j,k}\,\mathrm{E}_{i,\ell}$$
3. Soient $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\mathrm{B} \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. On a $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{AB}) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{BA})$;
4. Pour $\mathrm{A} = \big(a_{i,j}\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on a $\det \mathrm{A} = \displaystyle\sum_{\sigma\in \mathrm{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$;
5. Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On a
$$\mathrm{A}\mathrm{Com}(\mathrm{A})^\top = \mathrm{Com}(\mathrm{A})^\top \mathrm{A} = \det(\mathrm{A})\mathrm{I}_n$$

6 Polynômes

Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$, $a \in \mathbb{K}$ et m entier non nul. On a

$$a \text{ racine d'ordre } m \iff \mathrm{P}(a) = \mathrm{P}'(a) = \ldots = \mathrm{P}^{(m-1)}(a) = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{P}^{(m)}(a) \neq 0$$

$$a \text{ racine d'ordre au moins } m \iff \mathrm{P}(a) = \mathrm{P}'(a) = \ldots = \mathrm{P}^{(m-1)}(a) = 0$$

7 Exercice type

Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ avec n entier. Pour $\mathrm{P} \in \mathrm{E}$, on pose $\varphi(\mathrm{P}) = (\mathrm{X}-1)\mathrm{P}' - n\mathrm{P}$. Montrer que $\varphi \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$, préciser sa matrice dans la base canonique puis déterminer une base de $\operatorname{Ker} \varphi$ et $\operatorname{Im} \varphi$.

Corrigé : L'application φ est linéaire par linéarité du produit à gauche et de la dérivation puis $\varphi(\mathrm{X}^k) = (k-n)\mathrm{X}^k - k\mathrm{X}^{k-1}$ pour $k \in [\![0\,;\, n]\!]$. Notant $\mathscr{C}$ la base canonique de E, on a

$$\operatorname{mat}_{\mathscr{C}}\varphi = \begin{pmatrix} -n & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -(n-1) & -2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -n \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour déterminer $\operatorname{Ker} \varphi$, on résout l'équation différentielle $(t-1)x' - nx = 0$ sur l'intervalle $\mathrm{I} =]\,1\,;+\infty\,[$. On trouve $\operatorname{Vect}(t \mapsto (t-1)^n)$ comme espace de solutions d'où $(\mathrm{X}-1)^n$ générateur de $\operatorname{Ker} \varphi$. D'après le théorème du rang, il s'ensuit $\operatorname{rg} \varphi = n$. D'après la forme de la matrice, on a $\operatorname{Im} \varphi \subset \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$ et l'inclusion est une égalité par égalité des dimensions. Ainsi, on conclut

$$\boxed{((\mathrm{X}-1)^n) \text{ base de } \operatorname{Ker} \varphi,\ (\mathrm{X}^k)_{k \in [\![0\,;\, n-1]\!]} \text{ base de } \operatorname{Im} \varphi}$$

8 Exercice type

Soit $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ avec $\operatorname{rg} \mathrm{M} = 1$. Montrer qu'il existe X et Y des matrices colonnes non nulles telles que $\mathrm{M} = \mathrm{X}\mathrm{Y}^\top$.

Corrigé : Il existe une colonne X de M non nulle. Toutes les autres colonnes de M sont colinéaires à celle-ci d'où $\mathrm{M} = (y_1\mathrm{X}|\dots|y_n\mathrm{X}) = \mathrm{X}\mathrm{Y}^\top$ avec Y dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $\mathrm{Y} \neq 0$ puisque l'un des y_j vaut 1.

9 Exercice type

Soit $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ avec $\operatorname{rg} \mathrm{M} = 1$. Déterminer une expression simple de M^2 en fonction de M.

Corrigé : On utilise le résutlat de l'exercice précédent. Il existe des matrices colonnes non nulles X et Y telles que $\mathrm{M} = \mathrm{X}\mathrm{Y}^\top$. Par suite, avec l'associativité du produit matriciel, il vient

$$\mathrm{M}^2 = (\mathrm{X}\mathrm{Y}^\top)(\mathrm{X}\mathrm{Y}^\top) = \mathrm{X}\,\underbrace{(\mathrm{Y}^\top\mathrm{X})}_{\in \mathbb{K}}\,\mathrm{Y}^\top = (\mathrm{Y}^\top\mathrm{X})\mathrm{M}$$

Or, d'après la propriété fondamentale de la trace, on a

$$\operatorname{Tr}(\mathrm{M}) = \operatorname{Tr}(\mathrm{X}\mathrm{Y}^\top) = \operatorname{Tr}(\mathrm{Y}^\top\mathrm{X}) = \mathrm{Y}^\top\mathrm{X}$$

Ainsi $$\boxed{\mathrm{M}^2 = \operatorname{Tr}(\mathrm{M})\mathrm{M}}$$

10 Questions de cours

Structures, révisions et compléments d'algèbre linéaire, graphes usuels.