ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Feuille d'exercices n°13

Exercice 1 (*)

Montrer que $]-1\,;1\,[$ muni de la loi $\star$ définie par $x \star y = \dfrac{x+y}{1+xy}$ est un groupe commutatif.

Exercice 2 (**)

Soit φ un morphisme non constant d'un groupe fini $(\mathrm{G}, \star)$ vers $(\mathbb{C}^*, \times)$. Calculer

$$\sum_{x \in \mathrm{G}} \varphi(x)$$

On pourra considérer l'application $x \mapsto a \star x$ avec $a \in \mathrm{G}$ bien choisi.

Exercice 3 (*)

On pose $$\mathbb{Z}[i] = \{a + \mathrm{i}b, (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$$

Montrer que $(\mathbb{Z}[i], +, \times)$ est un anneau commutatif puis déterminer $\mathrm{U}(\mathbb{Z}[i])$. On pourra considérer l'application $\mathrm{N} : \mathbb{C} \to \mathbb{R}, z \mapsto z\bar{z}$.

Exercice 4 (**)

On note $$\mathbb{D} = \left\{ \frac{p}{10^n},\ (p, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \right\}$$

1. Montrer que $\mathbb{D}$ est un sous-anneau de $(\mathbb{Q}, +, \times)$.
2. Déterminer $\mathrm{U}(\mathbb{D})$.

Exercice 5 (**)

Soit $(\mathrm{A}, +, \times)$ un anneau commutatif. Un élément $x \in \mathrm{A}$ est dit *nilpotent* s'il existe n entier non nul tel que $x^n = 0_{\mathrm{A}}$. On note

$$\mathcal{N}(\mathrm{A}) = \{x \in \mathrm{A} \mid x \text{ nilpotent}\}$$

1. Montrer que $\mathcal{N}(\mathrm{A})$ est un idéal de A.
2. Soit $a \in \mathcal{N}(\mathrm{A})$. Montrer que $1_{\mathrm{A}} - a$ est inversible.
3. Soit $a \in \mathcal{N}(\mathrm{A})$ et b inversible. Montrer que $a + b$ est inversible.

Exercice 6 (**)

Un idéal I d'un anneau commutatif $(\mathrm{A}, +, \times)$ est dit *premier* si

$$\forall x, y \in \mathrm{A} \quad xy \in \mathrm{I} \quad \Longrightarrow \quad x \in \mathrm{I} \text{ ou } y \in \mathrm{I}$$

Décrire les idéaux premiers de $(\mathbb{K}[\mathrm{X}], +, \times)$.

Exercice 7 (**)

Soit n entier. Déterminer le reste de la division euclidienne X^n par $(\mathrm{X}-a)(\mathrm{X}-b)$ avec a, b dans $\mathbb{K}$.

Exercice 8 (*)

Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ avec $\deg \mathrm{P} \geqslant 1$. Déterminer r le nombre de racines de P en fonction de P et $\mathrm{P} \wedge \mathrm{P}'$.

Exercice 9 (**)

Soit $(\mathrm{T}_n)_n$ une suite de polynômes de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ définie par

$$\mathrm{T}_0 = 1, \quad \mathrm{T}_1 = \mathrm{X}, \quad \forall n \geqslant 2 \quad \mathrm{T}_n = 2\mathrm{X}\mathrm{T}_{n-1} - \mathrm{T}_{n-2}$$

1. Calculer $\mathrm{T}_2, \mathrm{T}_3$.
2. Déterminer le degré, le coefficient dominant et la parité de T_n.
3. Montrer que $\qquad \forall (n, \theta) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R} \qquad \mathrm{T}_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$
4. En déduire une expression factorisée de T_n.

Exercice 10 (*)

Soit $\qquad \varphi \colon \begin{cases} \mathbb{K}_{2n-1}[\mathrm{X}] \longrightarrow \mathbb{K}^{2n} \\ \quad \mathrm{P} \quad \longmapsto (\mathrm{P}(0), \mathrm{P}'(0), \ldots, \mathrm{P}^{(n-1)}(0), \mathrm{P}(1), \mathrm{P}'(1), \ldots, \mathrm{P}^{(n-1)}(1)) \end{cases}$

Montrer que φ est bijective.

Exercice 11 (**)

Soit $\mathrm{X} \subset \mathbb{R}_+$ un ensemble fini non vide. Montrer qu'il existe $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ tel que

$$\forall x \in \mathrm{X} \qquad \mathrm{P}(x) = \sqrt{x}$$

Exercice 12 (*)

Parmi les ensembles suivants, lesquels ont une structure de $\mathbb{K}$-algèbres :
- $\mathscr{D}_n(\mathbb{K})$ ensemble des matrices diagonales de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$,
- $\mathscr{T}_n^+(\mathbb{K})$ ensemble des matrices triangulaires supérieures de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$,
- $\mathscr{T}_n^{++}(\mathbb{K})$ ensemble des matrices triangulaires supérieures strites de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$,
- $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ ensemble des matrices symétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$?

Exercice 13 (*)

Déterminer les morphismes de $\mathbb{R}$-algèbres de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.