ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Feuille d'exercices n°14

Exercice 1 (**)

On note $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients dans $\mathbb{Z}$ et de déterminant égal à 1. Montrer que $(\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}), \times)$ est un groupe.

Exercice 2 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et G un sous-groupe de GL(E) de cardinal fini n. Montrer

$$\dim \bigcap_{g \in \mathrm{G}} \mathrm{Ker}\,(g - \mathrm{id}\,) = \frac{1}{n} \sum_{g \in \mathrm{G}} \mathrm{Tr}\ g$$

Exercice 3 (****)

Soit $(\mathrm{A}, +, \times)$ un anneau. Montrer

$$\forall (x, y) \in \mathrm{A}^2 \qquad 1_{\mathrm{A}} - xy \in \mathrm{U}(\mathrm{A}) \iff 1_{\mathrm{A}} - yx \in \mathrm{U}(\mathrm{A})$$

On pourra supposer en premier lieu que xy est nilpotent.

Exercice 4 (**)

Soit I un idéal d'un anneau commutatif $(\mathrm{A}, +, \times)$. On définit le *radical* de I noté R(I) par

$$\mathrm{R}(\mathrm{I}) = \{x \in \mathrm{A} \mid \exists n \in \mathbb{N}^* \ : \ x^n \in \mathrm{I}\}$$

1. Montrer que R(I) est un idéal de A contenant I.
2. Montrer que pour I, J des idéaux de A, on a

$$\mathrm{I} \subset \mathrm{J} \Longrightarrow \mathrm{R}(\mathrm{I}) \subset \mathrm{R}(\mathrm{J}) \qquad \mathrm{R}(\mathrm{I} \cap \mathrm{J}) = \mathrm{R}(\mathrm{I}) \cap \mathrm{R}(\mathrm{J}) \qquad \mathrm{R}(\mathrm{I}) + \mathrm{R}(\mathrm{J}) \subset \mathrm{R}(\mathrm{I} + \mathrm{J})$$

3. Soit I idéal de A. Montrer $\qquad \mathrm{R}(\mathrm{R}(\mathrm{I})) = \mathrm{R}(\mathrm{I})$

Exercice 5 (**)

Que peut-on dire d'une suite croissante d'idéaux de $(\mathbb{K}[\mathrm{X}], +, \times)$?

Exercice 6 (**)

Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ scindé à racines simples avec $\deg \mathrm{P} > 1$.

1. Montrer que P' est également scindé à racines simples.
2. Montrer que P ne peut avoir deux coefficients nuls consécutifs.

Exercice 7 (**)

Soient $x_0, \ldots, x_n$ des réels deux à deux distincts. Montrer

$$\exists! (\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \quad | \quad \forall \mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}] \qquad \int_0^1 \mathrm{P}(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \mathrm{P}(x_k)$$

Exercice 8 (**)

On note $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$. Pour $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$, on pose

$$\forall k \in \mathbb{Z} \qquad c_k(\mathrm{P}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{P}(\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}t})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}t$$

1. Pour $k \in \mathbb{Z}$ et $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$, déterminer $c_k(\mathrm{P})$ en fonction des coefficients de P.
2. Déterminer les polynômes $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ tels que $\mathrm{P}(\mathbb{U}) \subset \mathbb{R}$.

Exercice 9 (***)

Soit $\mathrm{P} = \mathrm{X}^n + \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k \mathrm{X}^k \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ unitaire. Montrer que toute racine ω de P vérifie

$$|\omega| \leqslant 1 + \operatorname*{Max}_{k \in [\![0\,;\, n-1]\!]} |a_k|$$

Exercice 10 (***)

Soit $\mathrm{P} = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \mathrm{X}^k \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$. On note $\mathrm{M} = \operatorname*{Sup}_{|z|=1} |\mathrm{P}(z)|$.

Montrer $$\forall k \in [\![0\,;\, n]\!] \qquad |a_k| \leqslant \mathrm{M}$$

Exercice 11 (***)

On définit $$\forall x \in \mathbb{R} \smallsetminus \pi\mathbb{Z} \qquad \operatorname{cotan}(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

Pour n entier non nul, on note

$$\mathrm{P}_n = (\mathrm{X}+1)^n - (\mathrm{X}-1)^n \qquad \mathrm{C}_n = \sum_{k=1}^{n-1} \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

avec pour convention $\sum\limits_{k=1}^{0} \ldots = 0$.

1. Pour n entier non nul, déterminer une écriture factorisée de P_n dans $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$.
2. Notant $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ les racines de P_n, déterminer le coefficient de degré $\deg(\mathrm{P}_n) - 2$ de P_n.
3. En déduire la valeur de C_n pour tout n entier non nul.