Feuille d'exercices n°15

Exercice 1 (***)

On pose $$\mathbb{Z}[\mathrm{i}] = \{a + \mathrm{i}b, (a,b) \in \mathbb{Z}^2\}$$

1. Soient u, v dans $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ avec $v \neq 0$. Montrer qu'il existe un couple $(q,r) \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}]^2$ tel que $u = qv + r$ et $|r| < |v|$.
2. Montrer que les idéaux de $(\mathbb{Z}[\mathrm{i}], +, \times)$ sont exactement les $v\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ avec $v \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}]$.

Indications : 1. Notant $\dfrac{u}{v} = x + \mathrm{i}y$ avec x et y réels, considérer $q = a + \mathrm{i}b$ avec a et b entiers relatifs les plus proches respectivement de x et y.
2. Suivre la même démarche que pour les idéaux de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$.

Exercice 2 (****)

Un anneau intègre est dit *principal* si tout idéal de A est engendré par un élément. On note $\mathrm{A} = \mathbb{Z}[\mathrm{i}\sqrt{5}] = \left\{a + \mathrm{i}b\sqrt{5},\ (a,b) \in \mathbb{Z}^2\right\}$ muni des opérations $(+, \times)$.

1. Vérifier que $(\mathrm{A}, +, \times)$ est un anneau commutatif.
2. Pour $z \in \mathrm{A}$, on note $\mathrm{N}(z) = z\bar{z}$. Vérifier que
$$\forall (z,z') \in \mathrm{A}^2 \qquad \mathrm{N}(zz') = \mathrm{N}(z)\mathrm{N}(z')$$
En déduire $\mathrm{U}(\mathrm{A})$.
3. Après avoir vérifié que $(1 + \mathrm{i}\sqrt{5}) \times (1 - \mathrm{i}\sqrt{5}) = 2 \times 3$, conclure que A n'est pas principal.

Indications : 1. Vérifier que A est un sous-anneau de $(\mathbb{C}, +, \times)$.
2. Observer que $\mathrm{N}(z) \in \mathbb{N}$ pour $z \in \mathrm{A}$.
3. Un élément p de A est dit *irréductible* si $p \notin \mathrm{U}(\mathrm{A})$ et si
$$\forall (a,b) \in \mathrm{A}^2 \qquad p = ab \quad \Longrightarrow \quad a \in \mathrm{U}(\mathrm{A}) \quad \text{ou} \quad b \in \mathrm{U}(\mathrm{A})$$
Vérifier que $1 + \mathrm{i}\sqrt{5}$, 2 et 3 sont irréductibles. Puis supposer l'anneau A principal et obtenir une contradiction en considérant $\left(1 + \mathrm{i}\sqrt{5}\right) + (2)$.

Exercice 3 (***)

Soit $(\mathbb{K}, +, \times, \cdot)$ une $\mathbb{R}$-algèbre commutative, intègre, de dimension finie $n \geqslant 2$.

1. Soit a un élément non nul de $\mathbb{K}$. Pour $x \in \mathbb{K}$, on pose $f_a(x) = ax$. Montrer que f est un automorphisme linéaire de $\mathbb{K}$.
2. Soit $a \in \mathbb{K} \setminus \mathbb{R}$. Montrer que la famille $(1, a)$ est libre mais pas $(1, a, a^2)$.
3. Montrer que l'on peut trouver $\mathrm{i} \in \mathbb{K}$ tel que $\mathrm{i}^2 = -1$. En déduire que $\mathbb{K}$ est une $\mathbb{R}$-algèbre isomorphe à $\mathbb{C}$.

Indications : 1. Déterminer Ker f_a.
2. Choisir $a \in \mathbb{K} \smallsetminus \mathbb{R}$ puis considérer la famille $\left(a^k\right)_{k \in [\![0\,;\,n]\!]}$ et en déduire l'existence d'un polynôme non nul $\mathrm{R} = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \mathrm{X}^k \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ tel que $\mathrm{R}(a) = 0$. Considérer enfin l'écriture de R comme produit de facteurs irréductibles de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ pour exhiber un facteur P_a de degré 2 tel que $\mathrm{P}_a(a) = 0$.
3. Choisir P_a unitaire et construire, par factorisation canonique, un élément $b \in \mathbb{K}$ tel que $b^2 = -1$. Conclure en vérifiant $\mathbb{K} = \mathrm{Vect}\,(1, b)$.

Exercice 4 (***)

Déterminer dans $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ les polynômes divisibles par leur polynôme dérivé.

Indications : Pour $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ tel que $\mathrm{P}'|\mathrm{P}$, justifier que $\mathrm{P} = \lambda(\mathrm{X} - \alpha)\mathrm{P}'$ avec α, λ des scalaires puis notant m l'ordre de α et $\mathrm{Q} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ tel que $\mathrm{P} = \lambda(\mathrm{X} - \alpha)^m \mathrm{Q}$, établir $\mathrm{Q}' = 0$. On peut aussi considérer la fraction rationnelle $\dfrac{\mathrm{P}'}{\mathrm{P}}$ dans $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$.

Exercice 5 (****)

Pour P dans $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$, on note Z(P) l'ensemble des racines de P.

1. Soit P dans $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$ avec $\deg \mathrm{P} \geqslant 1$. Montrer
$$\mathrm{Card}\ \mathrm{Z}(\mathrm{P}) = \deg \mathrm{P} - \deg(\mathrm{P} \wedge \mathrm{P}')$$
2. Soient P, Q des polynômes non constants de $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$ tels que $\mathrm{Z}(\mathrm{P}) = \mathrm{Z}(\mathrm{Q})$ et $\mathrm{Z}(\mathrm{P} - 1) = \mathrm{Z}(\mathrm{Q} - 1)$. Montrer que $\mathrm{P} = \mathrm{Q}$.

Indications : 1. En considérant une écriture factorisée de P, en déduire une écriture de $\mathrm{P} \wedge \mathrm{P}'$ puis la relation attendue.
2. Supposer $\deg \mathrm{P} = n \geqslant m = \deg \mathrm{Q}$ puis poser $\mathrm{R} = \mathrm{P} - \mathrm{Q}$. Comparer Z(R) avec Z(P) et $\mathrm{Z}(\mathrm{P}-1)$ puis établir que $\mathrm{P} \wedge \mathrm{P}'$ et $(\mathrm{P} - 1) \wedge \mathrm{P}'$ sont des facteurs premiers de P'.

Exercice 6 (***)

Soient P, Q deux polynômes de $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$ non constants avec $\deg \mathrm{P} = n$ et $\deg \mathrm{Q} = m$. On pose
$$\Phi\colon \begin{cases} \mathbb{C}_{m-1}[\mathrm{X}] \times \mathbb{C}_{n-1}[\mathrm{X}] \longrightarrow \mathbb{C}_{n+m-1}[\mathrm{X}] \\ \qquad (\mathrm{U}, \mathrm{V}) \qquad\quad \longmapsto \mathrm{UP} + \mathrm{VQ} \end{cases}$$

1. Montrer que Φ est bien définie, linéaire puis déterminer sa matrice dans les bases canoniques des espaces de départ et d'arrivée. On notera Res[P, Q] le déterminant de cette matrice appelé *résultant* de P et Q.
2. Établir
$$\Phi \text{ bijective} \iff \mathrm{P} \wedge \mathrm{Q} = 1$$
3. Soit $\mathrm{P} = \mathrm{X}^3 + px + q$ avec $p, q \in \mathbb{C}$. Montrer que P admet une racine double si et seulement si $4p^3 + 27q^2 = 0$.

Indications : 1. Considérer $(\mathrm{X}^i, 0)_{0 \leqslant i \leqslant m-1}$ suivi de $(0, \mathrm{X}^{i-m})_{m \leqslant i \leqslant n+m-1}$ base canonique de $\mathbb{C}_{m-1}[\mathrm{X}] \times \mathbb{C}_{n-1}[\mathrm{X}]$.
2. Utiliser la relation de Bezout pour le sens direct et le lemme de Gauss pour la réciproque.
3. Traduire en une relation entre P et P′ le fait d'avoir une racine double pour P′.