ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025 14/09/24

Commentaires - Devoir surveillé n°1

I Calcul d'une intégrale

1. Il faut impérativement établir $1 + te^{\mathrm{i}\theta} \neq 0$ pour $\theta \in \left]-\pi\,;\pi\right[$ et $t > 0$. Cette vérification a été très peu faite et quand elle était rédigée, c'était la plupart du temps sans aucun détail des calculs. Très peu ont réalisé qu'on a $x - 1 < 0$ et qu'il faut donc invoquer un critère de Riemann en 0. Étudier l'intégrabilité et donc travailler en module était l'approche la plus confortable ici, que peu ont privilégié.

2. Très peu ont suivi l'indication et encore moins l'ont montré. Cette indication est pourtant tout sauf superflue puisqu'elle permet une domination locale adaptée ici. Question à reprendre pour la grande majorité.

3. Certains se relancent dans une dérivation sous l'intégrale alors que ce travail a déjà été fait ! Un grand nombre aboutit à l'expression attendue de g' mais certains ne concluent pas alors que le plus gros du travail a été fait, c'est dommage. Enfin, il importe de préciser que la dérivée g' est nulle sur un <u>intervalle</u> pour conclure au caractère constant.

4. OK.

5. Plutôt bien réussie, le changement de variables est très apparent dans l'intitulé de la question.

6. Très peu réussie, la question était réellement technique. Il faut poser une fonction définie sur deux régimes par

$$\forall(\theta, u) \in \left]0\,;\pi\right[\times \mathbb{R} \qquad h(\theta, u) = \begin{cases} \dfrac{(u\sin(\theta) - \cos(\theta))^x}{1+u^2} & \text{si } u \geqslant \operatorname{cotan}(\theta) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et ensuite, mettre en œuvre le théorème de convergence dominée.

7. Plutôt bien réussie par ceux qui ont abordé la question.

II Une expression utile de la fonction sinus

8. Assez bien réussie seulement, alors qu'il suffit d'évoquer la relation de Chasles et de faire le changement de variables naturel $u = 1/t$ qui permet de passer de $\left]1\,;+\infty\right[$ à $\left]0\,;1\right[$.

9. Personne n'a totalement réussi cette question alors que la démarche présentée en cours pour le calcul de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ fonctionne à l'identique ici. On considère pour n entier et $x \in \left]0\,;1\right[$

$$\int_0^1 t^{x-1} \sum_{k=0}^{n} (-t)^k \,\mathrm{d}t = \int_0^1 t^{x-1} \frac{1-(-t)^{n+1}}{1+t} \,\mathrm{d}t$$

et on passe à la limite après la justification idoine.

10. Beaucoup d'arnaques, il faut justifier l'emploi du résultat de la question précédente en mentionnant $1 - x \in \,]\,0\,;1\,[$ pour $x \in \,]\,0\,;1\,[$.

11, 12. OK.

III Calcul d'une intégrale de Dirichlet généralisée

13. Question non triviale mais très classique et très proche de choses vues en cours. Pas toujours bien réussie. Il faut évidemment mentionner la continuité par morceaux de l'intégrande sur un intervalle à préciser puis mener une étude asymptotique adaptée (revoir le bon usage des o, O, $\sim$). Pour intégrer par parties, il est indispensable d'établir la finitude du crochet.

14. Réussite mitigée. Il faut agir en deux temps : s'affranchir de la dépendance en n dans les bornes (avec $u = t - n\pi$) puis transformer l'intégrale avec des arguments type parité/imparité pour couper en deux l'intervalle centré $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

15. Question très technique. Difficilement abordable (mais possible) avec les seules connaissances établies à ce moment de l'année. Réussie dans une copie.

16. Question très facile, que trop peu ont abordé.

17. Réussite mitigée bien que les techniques de transformation de la somme soient très classiques.

18. Question de synthèse, très facile mais peu abordée.

IV Calcul de $\mathbb{E}(|\mathrm{S}_n|)$

Dernière partie, très peu abordée.

19. Question très classique, peu traitée.

20, ... Quasiment plus personne à partir de cette question.

25. Question d'assemblage sans aucune difficulté, récompensée uniquement sous réserve d'avoir traité la question précédente.