ALGÈBRE LINÉAIRE
RAPPELS ET COMPLÉMENTS

B. Landelle

Table des matières

Dans ce chapitre, l'ensemble E désigne un $\mathbb{K}$-ev avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Espaces vectoriels

1 Sous-espaces vectoriels

Proposition 1. *Soit* $\mathrm{F} \subset \mathrm{E}$. *On a* F *sev de* E *si et seulement si*

$$0_{\mathrm{E}} \in \mathrm{F} \quad \text{et} \quad \forall (x, y, \lambda) \in \mathrm{F}^2 \times \mathbb{K} \qquad \lambda x + y \in \mathrm{F}$$

Proposition 2. *Une intersection de sev de* E *est un sev de* E.

Définition 1. *Soit* $\mathrm{X} \subset \mathrm{E}$. *On appelle espace engendré par* X *le sev noté* $\operatorname{Vect}(\mathrm{X})$ *défini par*

$$\operatorname{Vect}(\mathrm{X}) = \bigcap_{\mathrm{F} \text{ sev } \supset \mathrm{X}} \mathrm{F}$$

Proposition 3. *Soit* $\mathrm{X} \subset \mathrm{E}$. *Le sev* $\operatorname{Vect}(\mathrm{X})$ *est le plus petit sev contenant* X.

2 Combinaisons linéaires

On note $\mathbb{K}^{(\mathrm{I})}$ l'ensemble des familles presque nulles de scalaires de $\mathbb{K}$.

Définition 2. *Soit* $(x_i)_{i \in \mathrm{I}}$ *famille de vecteurs de* E. *On appelle combinaison linéaire des* $(x_i)_{i \in \mathrm{I}}$ *un élément de la forme* $\sum\limits_{i \in \mathrm{I}} \alpha_i x_i$ *avec* $(\alpha_i)_{i \in \mathrm{I}} \in \mathbb{K}^{(\mathrm{I})}$.

Proposition 4. *Soit* $(x_i)_{i \in \mathrm{I}}$ *famille de vecteurs de* E. *On a*

$$\operatorname{Vect}(x_i)_{i \in \mathrm{I}} = \left\{ \sum_{i \in \mathrm{I}} \alpha_i x_i, (\alpha_i)_{i \in \mathrm{I}} \in \mathbb{K}^{(\mathrm{I})} \right\}$$

En particulier, pour $x \in \mathrm{E}$, *on a* $\quad \operatorname{Vect}(x) = \{\alpha x, \alpha \in \mathbb{K}\}$

et pour $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{E}^n$, *on a*

$$\operatorname{Vect}(x_1, \ldots, x_n) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i, (\alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{K}^n \right\}$$

Définition 3. *Soit* $(x_i)_{i \in \mathrm{I}}$ *famille de vecteurs de* E. *C'est une famille* libre *si*

$$\forall (\alpha_i)_{i \in \mathrm{I}} \in \mathbb{K}^{(\mathrm{I})} \qquad \sum_{i \in \mathrm{I}} \alpha_i x_i = 0_{\mathrm{E}} \implies \forall i \in \mathrm{I} \qquad \alpha_i = 0$$

C'est une famille liée *si* $\qquad \exists (\alpha_i)_{i \in \mathrm{I}} \in \mathbb{K}^{(\mathrm{I})} \smallsetminus \{0_{\mathbb{K}^{\mathrm{I}}}\} \mid \sum\limits_{i \in \mathrm{I}} \alpha_i x_i = 0_{\mathrm{E}}$

Définition 4. *On appelle* droite vectorielle *un sev de la forme* $\operatorname{Vect}(x)$ *avec* $x \in \mathrm{E} \smallsetminus \{0_{\mathrm{E}}\}$ *et* plan vectoriel *un sev de la forme* $\operatorname{Vect}(x, y)$ *avec* $(x, y) \in \mathrm{E}^2$ *libre.*

Définition 5. *Soit* F *sev de* E. *Une famille* $(x_i)_{i \in \mathrm{I}}$ *de vecteurs de* E *est* génératrice *de* F *si*

$$\mathrm{F} = \operatorname{Vect}(x_i)_{i \in \mathrm{I}}$$

Définition 6. *Une* base *de* E *est une famille libre et génératrice de* E.

Théorème 1. *Tout vecteur de* E *se décompose comme une unique combinaison linéaire des vecteurs d'une base de* E.

3 Sommes de sev

Proposition 5. *Soient* $\mathrm{F}_1, \dots, \mathrm{F}_p$ *des sev de* E. *La somme*

$$\sum_{i=1}^{p} \mathrm{F}_i = \left\{ \sum_{i=1}^{p} x_i, (x_1, \dots, x_p) \in \mathrm{F}_1 \times \dots \mathrm{F}_p \right\}$$

est un sev de E *contenant chacun des* F_k.

Démonstration. Chaque sev F_i contient 0_E d'où $0_\mathrm{E} = \sum_{i=1}^{p} 0_\mathrm{E} \in \sum_{i=1}^{p} \mathrm{F}_i$. Soit $\lambda \in \mathrm{K}$ et x, y dans $\sum_{i=1}^{p} \mathrm{F}_i$. On dispose de $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ et $(y_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ dans $\sum_{i=1}^{p} \mathrm{F}_i$. Il vient

$$\lambda x + y = \sum_{i=1}^{p} \underbrace{(\lambda x_i + y_i)}_{\in \mathrm{F}_i} \in \sum_{i=1}^{p} \mathrm{F}_i$$

ce qui prouve que $\sum_{i=1}^{p} \mathrm{F}_i$ est bien un sev de E. Par ailleurs, pour $k \in [\![1 ; p]\!]$ et $x_k \in \mathrm{F}_k$, avec $x_i = 0_\mathrm{E}$ pour tout $i \in [\![1 ; p]\!] \setminus \{k\}$, on a $x_k = \sum_{i=1}^{p} x_i \in \sum_{i=1}^{p} \mathrm{F}_i$ et ceci vaut pour tout $x_k \in \mathrm{F}_k$ d'où $\mathrm{F}_k \subset \sum_{i=1}^{p} \mathrm{F}_i$. □

Définition 7. *Soient* $\mathrm{F}_1, \dots, \mathrm{F}_p$ *des sev de* E. *La somme* $\sum_{i=1}^{p} \mathrm{F}_i$ *est* directe *si*

$$\forall x \in \sum_{i=1}^{p} \mathrm{F}_i \quad \exists! (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p} \in \prod_{i=1}^{p} \mathrm{F}_i \quad | \quad x = \sum_{i=1}^{p} x_i$$

On note $\bigoplus_{i=1}^{p} \mathrm{F}_i$ *cette somme.*

Proposition 6. *Soient* F, G *sev de* E. *On a*

$$\mathrm{F} + \mathrm{G} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G} \iff \mathrm{F} \cap \mathrm{G} = \{0_\mathrm{E}\}$$

Définition 8. *Des sev* F *et* G *de* E *sont dits* supplémentaires *si* $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$.

Proposition 7. *Soient* $\mathrm{F}_1, \dots, \mathrm{F}_p$ *des sev de* E. *On a*

$$\sum_{i=1}^{p} \mathrm{F}_i = \bigoplus_{i=1}^{p} \mathrm{F}_i \iff \forall (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p} \in \prod_{i=1}^{p} \mathrm{F}_i \quad \sum_{i=1}^{p} x_i = 0_\mathrm{E} \quad \Longrightarrow \quad \forall i \in [\![1 ; p]\!] \quad x_i = 0_\mathrm{E}$$

Démonstration. Le sens direct est immédiat puisque $\sum_{i=1}^{p} 0_\mathrm{E} = 0_\mathrm{E}$ et qu'une telle décomposition dans $\bigoplus_{i=1}^{p} \mathrm{F}_i$ est unique. Réciproquement, soient $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ et $(y_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ dans $\prod_{i=1}^{p} \mathrm{F}_i$ tels que $\sum_{i=1}^{p} x_i = \sum_{i=1}^{p} y_i$. Il s'ensuit $\sum_{i=1}^{p} \underbrace{(x_i - y_i)}_{\in \mathrm{F}_i} = 0_\mathrm{E}$ d'où $x_i = y_i$ pour tout $i \in [\![1 ; p]\!]$ ce qui prouve l'unicité. □

Proposition 8. *Soit* F *sev de* E *et* $\mathrm{F}_1, \dots, \mathrm{F}_p$ *des sev de* E *de bases respectives* $\mathscr{B}_1, \dots, \mathscr{B}_p$.

On a $$\mathrm{F} = \bigoplus_{k=1}^{p} \mathrm{F}_k \iff \biguplus_{k=1}^{p} \mathscr{B}_k \text{ est une base de } \mathrm{F}$$

Démonstration. Pour $k \in [\![1 ; p]\!]$, on note $\mathscr{B}_k = (e_{i,k})_{i \in \mathrm{I}_k}$. On a

$$\begin{aligned} \mathrm{F} = \bigoplus_{k=1}^{p} \mathrm{F}_k &\iff \forall x \in \mathrm{F} \qquad \exists! (x_k)_{1 \leqslant k \leqslant p} \in \prod_{k=1}^{p} \mathrm{F}_k \mid x = \sum_{k=1}^{p} x_k \\ &\iff \forall x \in \mathrm{F} \qquad \exists! \left((\alpha_{i,1})_{i \in \mathrm{I}_1}, \ldots, (\alpha_{i,p})_{i \in \mathrm{I}_p} \right) \in \prod_{k=1}^{p} \mathbb{K}^{(\mathrm{I}_k)} \mid x = \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{i \in \mathrm{I}_k} \alpha_{i,k} e_{i,k} \right) \end{aligned}$$

□

Vocabulaire : Une base de $\bigoplus_{k=1}^{p} \mathrm{F}_k$ obtenue par concaténation de bases de F_k est dite *adaptée* à la somme directe.

II Dimension finie

1 Bases

Définition 9. *Un $\mathbb{K}$-ev est de* dimension finie *s'il admet une famille génératrice finie.*

Théorème 2. *Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie. Toute famille libre peut être complétée en base de E.*

Théorème 3. *Tout $\mathbb{K}$-ev de dimension finie admet une base. Toutes les bases de cet espace sont finies et ont même cardinal appelé* dimension.

Remarque : L'espace nul admet comme base la famille vide et est de dimension nulle.

Définition 10. *Soit $(x_1, \ldots, x_p) \in \mathrm{E}^p$. Le* rang *de la famille $(x_1, \ldots, x_p)$ est la dimension de* $\mathrm{Vect}\,(x_1, \ldots, x_p)$.

Théorème 4. *Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n. Une famille de vecteurs de E libre ou génératrice de cardinal égal à n est une base de E.*

Proposition 9. *Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n avec $\mathscr{B}$ une base de E et $\mathscr{L}$ une famille de n vecteurs de E. On a*

$$\mathscr{L} \text{ base de } \mathrm{E} \iff \mathrm{mat}_{\mathscr{B}} \mathscr{L} \text{ inversible}$$

2 Sous-espaces en dimension finie

Proposition 10. *Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et F sev de E. Alors, le sev F est de dimension finie avec* $\dim \mathrm{F} \leqslant \dim \mathrm{E}$.

Proposition 11. *Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et F, G deux sev de E. On a*

$$\begin{cases} \mathrm{F} \subset \mathrm{G} \\ \dim \mathrm{F} = \dim \mathrm{G} \end{cases} \iff \mathrm{F} = \mathrm{G}$$

Théorème 5. *Tout sev d'un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie possède un supplémentaire.*

Théorème 6 (Formule de Grassman). *Soient F et G des sev de dimension finie d'un $\mathbb{K}$-ev E. On a*

$$\dim \mathrm{F} + \mathrm{G} = \dim \mathrm{F} + \dim \mathrm{G} - \dim \mathrm{F} \cap \mathrm{G}$$

Théorème 7. *Soit* E *un* $\mathbb{K}$*-ev de dimension finie et* F *et* G *des sev de* E*. On a*

$$\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G} \iff \begin{cases} \dim \mathrm{F} + \dim \mathrm{G} = \dim \mathrm{E} \\ \mathrm{F} \cap \mathrm{G} = \{0_{\mathrm{E}}\} \end{cases} \iff \begin{cases} \dim \mathrm{F} + \dim \mathrm{G} = \dim \mathrm{E} \\ \mathrm{F} + \mathrm{G} = \mathrm{E} \end{cases}$$

$$\iff \exists \mathscr{B}_{\mathrm{F}}, \mathscr{B}_{\mathrm{G}} \text{ bases respectives de } \mathrm{F}, \mathrm{G} \mid \mathscr{B}_{\mathrm{F}} \uplus \mathscr{B}_{\mathrm{G}} \text{ base de } \mathrm{E}$$

Théorème 8. *Soient* $\mathrm{F}_1, \ldots, \mathrm{F}_p$ *des sev de dimensions finies de* E*. On a*

$$\dim \sum_{k=1}^{p} \mathrm{F}_k \leqslant \sum_{k=1}^{p} \dim \mathrm{F}_k$$

avec égalité si et seulement si la somme est directe.

Démonstration. On pose

$$\Phi : \begin{cases} \prod_{k=1}^{p} \mathrm{F}_k & \longrightarrow \sum_{k=1}^{p} \mathrm{F}_k \\ (x_k)_{1 \leqslant k \leqslant p} & \longmapsto \sum_{k=1}^{p} x_k \end{cases}$$

D'après le théorème du rang, il vient

$$\dim \prod_{k=1}^{p} \mathrm{F}_k = \mathrm{rg}\,(\Phi) + \dim \mathrm{Ker}\ \Phi \geqslant \dim \mathrm{rg}\,(\Phi)$$

On note $(e_{i,k})_{i \in [\![1\,;\, m_k]\!]}$ une base de F_k pour $k \in [\![1\,;\, p]\!]$. Ainsi, pour $x \in \prod_{k=1}^{p} \mathrm{F}_k$, on a

$$x = \sum_{i=1}^{m_1} x_{i,1}(e_{i,1}, 0, \ldots) + \sum_{i=1}^{m_2} x_{i,2}(0, e_{i_2}, 0, \ldots) + \ldots$$

La famille exhibée est génératrice et clairement libre et forme donc une base du produit $\prod_{k=1}^{p} \mathrm{F}_k$. On en déduit $\dim \prod_{k=1}^{p} \mathrm{F}_k = \sum_{k=1}^{p} \dim \mathrm{F}_k$ et l'inégalité s'ensuit. Enfin, on a clairement $\mathrm{Ker}\ \Phi = \{0\}$ si et seulement si la somme est directe le cas d'égalité s'en déduit. □

Remarque : On peut aussi procéder par récurrence ou en considérant des bases $\mathscr{B}_k$ des F_k en remarquant que leur concaténation engendre $\sum_{k=1}^{p} \mathrm{F}_k$.

III Applications linéaires

Soient E, F, G des $\mathbb{K}$-ev.

1 Généralités

Définition 11. *Une application* $u : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ *est* linéaire *si* $u(x + \lambda y) = u(x) + \lambda u(y)$ *pour tout* $(x, y, \lambda) \in \mathrm{E}^2 \times \mathbb{K}$*. On note* $\mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ *l'ensemble de ces applications. C'est un* $\mathbb{K}$*-ev.*

Proposition 12. *Une composée d'applications linéaires est linéaire.*

Proposition 13. *Soient* $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$*. Le noyau* $\mathrm{Ker}\ u = u^{-1}(\{0_{\mathrm{F}}\})$ *et l'image* $\mathrm{Im}\ u = u(\mathrm{E})$ *sont des sev respectifs de* E *et de* F*.*

Définition 12. *Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$. Si u est bijective, on dit que u est un* isomorphisme. *Si $\mathrm{E} = \mathrm{F}$, on note simplement $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ et on dit que u est un* endomorphisme *de* E. *Si $\mathrm{E} = \mathrm{F}$ et u bijective, on note $u \in \mathrm{GL}(\mathrm{E})$ et on dit que u est un* automorphisme.

Exemple : Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. La suite des noyaux itérés $\left(\mathrm{Ker}\ u^k\right)_k$ est croissante et la suite des images itérées $\left(\mathrm{Im}\ u^k\right)_k$ est décroissante.

Proposition 14. *L'application réciproque d'un isomorphisme est un isomorphisme.*

Proposition 15. *Soient $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ et $v \in \mathscr{L}(\mathrm{F}, \mathrm{G})$ isomorphismes. On a $v \circ u$ isomorphisme avec $(v \circ u)^{-1} = u^{-1} \circ v^{-1}$.*

Théorème 9. *L'ensemble $(\mathrm{GL}(\mathrm{E}), \circ)$ est un groupe.*

Proposition 16. *Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$. On a*

$$u \text{ injective} \iff \mathrm{Ker}\ u = \{0_\mathrm{E}\}$$

Proposition 17. *Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ et $v \in \mathscr{L}(\mathrm{F}, \mathrm{G})$. On a*

$$v \circ u = 0 \iff \mathrm{Im}\ u \subset \mathrm{Ker}\ v$$

Remarque : On peut avoir $\mathrm{Im}\ u = \mathrm{Ker}\ u$. Par exemple en considérant $u \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^2)$ canoniquement associé à $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Proposition 18. *L'image d'une famille libre par une application linéaire injective est libre. L'image d'une famille génératrice par une application linéaire surjective est génératrice.*

Proposition 19. *Une application linéaire est caractérisée par l'image d'une base par cette application.*

Proposition 20. *Soit $\mathrm{E}_1, \ldots, \mathrm{E}_p$ des sev de E tels que $\mathrm{E} = \bigoplus_{i=1}^{p} \mathrm{E}_i$ et $u_i \in \mathscr{L}(\mathrm{E}_i, \mathrm{F})$ pour tout $i \in [\![1\,;\, p]\!]$. Il existe une unique application $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ telle que $u_{|\mathrm{E}_i} = u_i$ pour tout $i \in [\![1\,;\, p]\!]$.*

Démonstration. Supposons l'existence d'une telle application u. Soit $x \in \mathrm{E}$ avec $x = \sum_{i=1}^{p} x_i$ son unique décomposition dans $\bigoplus_{i=1}^{p} \mathrm{E}_i$. Alors, il vient

$$u(x) = u\left(\sum_{i=1}^{p} x_i\right) = \sum_{i=1}^{p} u(x_i) = \sum_{i=1}^{p} u_i(x_i)$$

ce qui prouve l'unicité d'une telle application sous réserve d'existence. On considère alors cette application $u : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ qui à $x = \sum_{i=1}^{p} x_i$ associe $\sum_{i=1}^{p} u_i(x_i)$. Elle est bien définie et pour $(x, y) \in \mathrm{E}^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, en considérant les décompositions de x et y dans $\bigoplus_{i=1}^{p} \mathrm{E}_i$, on a

$$u(\lambda x + y) = \sum_{i=1}^{p} u_i(\lambda x_i + y_i) = \sum_{i=1}^{p} (\lambda u_i(x_i) + u_i(y_i)) = \lambda u(x) + u(y)$$

et $u_{|\mathrm{E}_i}(x_i) = u(x_i) = u_i(x_i)$ avec $x_i \in \mathrm{E}_i$ pour tout $i \in [\![1\,;\, p]\!]$. $\square$

Définition 13. *Une* forme linéaire *est une application de* $\mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathbb{K})$. *Un* hyperplan *de* E *est le noyau d'une forme linéaire non nulle sur* E.

Proposition 21. *Soit* H *sev strict de* E *et* $x \in \mathrm{E} \setminus \mathrm{H}$. *On a*

$$\mathrm{H} \textit{ hyperplan} \iff \mathrm{E} = \mathrm{Vect}\,(x) \oplus \mathrm{H}$$

2 En dimension finie

Définition 14. *Soit* $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ *avec* E *de dimension finie. Le* rang *de* u *est* $\dim \mathrm{Im}\, u$.

Proposition 22. *Soit* $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ *avec* E *et* F *de dimension finie. On a*

$$\mathrm{rg}\,(u) \leqslant \min(\dim \mathrm{E}, \dim \mathrm{F})$$

Proposition 23. *Soit* $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ *avec* E *et* F *de dimensions finies non nulles,* $\mathscr{B}_{\mathrm{E}} = (e_1, \ldots, e_p)$ *base de* E *et* $\mathscr{B}_{\mathrm{F}} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ *base de* F. *On pose* $\mathrm{A} = (a_{i,j})_{(i,j) \in [\![1\,;\, n]\!] \times [\![1\,;\, p]\!]}$ *avec* $u(e_j) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,j} \varepsilon_i$ *pour tout* $j \in [\![1\,;\, p]\!]$. *On définit* $\mathrm{A} = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_{\mathrm{E}}, \mathscr{B}_{\mathrm{F}}} u$. *Pour* $(x, y) \in \mathrm{E} \times \mathrm{F}$ *et* $\mathrm{X} = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_{\mathrm{E}}} x$, $\mathrm{Y} = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_{\mathrm{F}}} y$, *on a*

$$y = u(x) \iff \mathrm{Y} = \mathrm{AX}$$

On a $\mathrm{rg}\,(u) = \mathrm{rg}\,(\mathrm{A})$. *Pour* $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, *l'application* $u : \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n, \mathrm{X} \mapsto \mathrm{AX}$ *est* canoniquement associée *à* A *(en confondant matrice colonne et vecteur).*

Proposition 24. *Soient* $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ *et* $v \in \mathscr{L}(\mathrm{F}, \mathrm{G})$ *avec* E, F, G *des* $\mathbb{K}$*-ev de dimensions finies et* $\mathscr{B}_{\mathrm{E}}$, $\mathscr{B}_{\mathrm{F}}$ *et* $\mathscr{B}_{\mathrm{G}}$ *bases respectives de* E, F *et* G, *on a*

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_{\mathrm{E}}, \mathscr{B}_{\mathrm{G}}} v \circ u = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_{\mathrm{F}}, \mathscr{B}_{\mathrm{G}}} v \times \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_{\mathrm{E}}, \mathscr{B}_{\mathrm{F}}} u$$

Proposition 25. *Soit* $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ *avec* E *de dimension finie,* $v \in \mathrm{GL}(\mathrm{E})$ *et* $w \in \mathrm{GL}(\mathrm{F})$. *On a*

$$\mathrm{rg}\,(u) = \mathrm{rg}\,(u \circ v) = \mathrm{rg}\,(w \circ u)$$

Proposition 26. *Soit* $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ *et* $v \in \mathscr{L}(\mathrm{F}, \mathrm{G})$ *avec* E *et* F *de dimension finie. On a*

$$\mathrm{rg}\,(v \circ u) \leqslant \min(\mathrm{rg}\,(u), \mathrm{rg}\,(v))$$

Théorème 10. *Soit* $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ *avec* E *de dimension finie. L'application* u *induit un isomorphisme d'un supplémentaire* S *de* $\mathrm{Ker}\, u$ *sur* $\mathrm{Im}\, u$.

Théorème 11 (Théorème du rang). *Soit* $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ *avec* E *de dimension finie. On a*

$$\dim \mathrm{E} = \mathrm{rg}\,(u) + \dim \mathrm{Ker}\, u$$

Remarque : Pour $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, le théorème du rang se décline ainsi :

$$p = \dim \mathrm{Ker}\ \mathrm{A} + \mathrm{rg}\ \mathrm{A}$$

En effet, les quantités $\mathrm{rg}\ \mathrm{A}$ et $\dim \mathrm{Ker}\ \mathrm{A}$ désignent respectivement $\mathrm{rg}\ u$ et $\dim \mathrm{Ker}\ u$ avec $u \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ canoniquement associé à A.

Exemple : Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ avec E de dimension finie. Les suites $\left(\mathrm{Ker}\ u^k\right)_k$ et $\left(\mathrm{Im}\ u^k\right)_k$ sont strictement monotones puis simultanément stationnaires. Si l'espace E est de dimension finie et qu'il existe k entier tel que $\mathrm{Ker}\ u^k = \mathrm{Ker}\ u^{k+1}$ (ou de même avec les images), le résultat annoncé vaut encore.

Théorème 12. *Soit* $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ *avec* E *et* F *de* <u>*même*</u> *dimension finie et* $\mathscr{B}_{\mathrm{E}}$ *base de* E. *On a*

$$u \textit{ bijective} \iff u \textit{ injective} \iff u \textit{ surjective} \iff \operatorname{rg} u = \dim \mathrm{E} \iff u(\mathscr{B}_{\mathrm{E}}) \textit{ base de } \mathrm{F}$$

Si $\mathrm{E} = \mathrm{F}$, *on peut ajouter* $\qquad u \in \mathrm{GL}(\mathrm{E}) \iff \det(u) \neq 0$

Théorème 13. *Soit* E *un* $\mathbb{K}$*-ev de dimension finie non nulle et* $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ *une base de* E. *Pour* $x \in \mathrm{E}$, *on note* $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$ *avec* x_i *les coordonnées de* x *dans* $\mathscr{B}$. *Pour* H *sev de* E,

on a $\qquad \mathrm{H} \textit{ hyperplan} \iff \exists (a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{K}^n \setminus \{0_{\mathbb{K}^n}\} \mid x \in \mathrm{H} \iff \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$

Application : Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base de E. Pour F sev strict de E, il existe $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ des scalaires non tous nuls tels que

$$\forall x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in \mathrm{F} \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$$

IV Matrices par blocs

1 Définitions, propriétés

Définition 15. *Soient* $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_{n_1,p_1}(\mathbb{K})$, $\mathrm{B} \in \mathscr{M}_{n_1,p_2}(\mathbb{K})$, $\mathrm{C} \in \mathscr{M}_{n_2,p_1}(\mathbb{K})$ *et* $\mathrm{D} \in \mathscr{M}_{n_2,p_2}(\mathbb{K})$. *On définit la* matrice par blocs $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *avec* $n = n_1 + n_2$, $p = p_1 + p_2$ *par*

$$\mathrm{M} = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \hline \mathrm{C} & \mathrm{D} \end{array}\right)$$

Interprétation géométrique : Soient E, F des $\mathbb{K}$-ev de dimensions finies non nulles avec $\mathscr{B}_{\mathrm{E}}$ base de E, $\mathscr{B}_{\mathrm{F}}$ base de F et $\mathscr{B}_{\mathrm{E}} = \mathscr{B}_{\mathrm{E}_1} \uplus \mathscr{B}_{\mathrm{E}_2}$, $\mathscr{B}_{\mathrm{F}} = \mathscr{B}_{\mathrm{F}_1} \uplus \mathscr{B}_{\mathrm{F}_2}$, $\mathrm{E}_1 = \operatorname{Vect}(\mathscr{B}_{\mathrm{E}_1})$, $\mathrm{E}_2 = \operatorname{Vect}(\mathscr{B}_{\mathrm{E}_2})$, $\mathrm{F}_1 = \operatorname{Vect}(\mathscr{B}_{\mathrm{F}_1})$ et $\mathrm{F}_2 = \operatorname{Vect}(\mathscr{B}_{\mathrm{F}_2})$ et $p_1 = \operatorname{Card} \mathscr{B}_{\mathrm{E}_1}$, $p_2 = \operatorname{Card} \mathscr{B}_{\mathrm{E}_2}$, $n_1 = \operatorname{Card} \mathscr{B}_{\mathrm{F}_1}$ et $n_2 = \operatorname{Card} \mathscr{B}_{\mathrm{F}_2}$. Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$. On a $\operatorname{mat}_{\mathscr{B}_{\mathrm{E}},\mathscr{B}_{\mathrm{F}}} u = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \hline \mathrm{C} & \mathrm{D} \end{array}\right)$ avec $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_{n_1,p_1}(\mathbb{K})$, $\mathrm{B} \in \mathscr{M}_{n_1,p_2}(\mathbb{K})$, $\mathrm{C} \in \mathscr{M}_{n_2,p_1}(\mathbb{K})$ et $\mathrm{D} \in \mathscr{M}_{n_2,p_2}(\mathbb{K})$ si et seulement si

$$\mathrm{A} = \operatorname{mat}_{\mathscr{B}_{\mathrm{E}_1},\mathscr{B}_{\mathrm{F}_1}}(\pi_1 \circ u_{|\mathrm{E}_1}) \quad \mathrm{B} = \operatorname{mat}_{\mathscr{B}_{\mathrm{E}_2},\mathscr{B}_{\mathrm{F}_1}}(\pi_1 \circ u_{|\mathrm{E}_2}) \dots$$

où $\pi_1 = p_{\mathrm{F}_1,\mathrm{F}_2}$ et $\pi_2 = p_{\mathrm{F}_2,\mathrm{F}_1}$.

Remarque : Plus généralement, on peut définir une matrice par blocs $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ avec q partitions de lignes et s de colonnes par

$$\mathrm{A} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \mathrm{A}_{1,1} & \mathrm{A}_{1,2} & \dots & \mathrm{A}_{1,s} \\ \hline \mathrm{A}_{2,1} & \mathrm{A}_{2,2} & \dots & \mathrm{A}_{2,s} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline \mathrm{A}_{q,1} & \mathrm{A}_{q,2} & \dots & \mathrm{A}_{q,s} \end{array}\right)$$

Proposition 27. *Soient* M_1, M_2 *dans* $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *matrices par blocs avec*

$$\mathrm{M}_1 = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A}_1 & \mathrm{B}_1 \\ \hline \mathrm{C}_1 & \mathrm{D}_1 \end{array}\right) \quad \textit{et} \quad \mathrm{M}_2 = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A}_2 & \mathrm{B}_2 \\ \hline \mathrm{C}_2 & \mathrm{D}_2 \end{array}\right)$$

où les blocs A_i *sont de même taille et de même pour les blocs* B_i, C_i *et* D_i. *Pour* $\lambda \in \mathbb{K}$, *on a*

$$\lambda \mathrm{M}_1 + \mathrm{M}_2 = \left(\begin{array}{c|c} \lambda \mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2 & \lambda \mathrm{B}_1 + \mathrm{B}_2 \\ \hline \lambda \mathrm{C}_1 + \mathrm{C}_2 & \lambda \mathrm{D}_1 + \mathrm{D}_2 \end{array}\right)$$

Démonstration. Immédiate $\square$

Proposition 28. *Soit* $\mathrm{M} = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \hline \mathrm{C} & \mathrm{D} \end{array}\right) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *matrice par blocs. On a*

$$\mathrm{M}^\top = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A}^\top & \mathrm{C}^\top \\ \hline \mathrm{B}^\top & \mathrm{D}^\top \end{array}\right)$$

Démonstration. Par distinction de cas (fastidieux). $\square$

Définition 16. *On appelle* matrice triangulaire supérieure par blocs *une matrice de la forme*

$$\mathrm{A} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \mathrm{A}_{1,1} & \dots & \dots & \mathrm{A}_{1,r} \\ \hline 0 & \ddots & & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & \dots & 0 & \mathrm{A}_{r,r} \end{array}\right)$$

avec les $\mathrm{A}_{i,i}$ *des matrices carrées. On appelle* matrice diagonale par blocs *une matrice de la forme*

$$\mathrm{A} = \operatorname{diag}(\mathrm{A}_1, \dots, \mathrm{A}_r)$$

avec les A_i *des matrices carrées.*

Remarque : De la même façon, on définit une matrice triangulaire inférieure par blocs.

2 Produits, déterminants

Proposition 29 (Produit par blocs). *Soit* $\mathrm{M}_1 \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *et* $\mathrm{M}_2 \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ *matrices par blocs avec*

$$\mathrm{M}_1 = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A}_1 & \mathrm{B}_1 \\ \hline \mathrm{C}_1 & \mathrm{D}_1 \end{array}\right) \quad \textit{et} \quad \mathrm{M}_2 = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A}_2 & \mathrm{B}_2 \\ \hline \mathrm{C}_2 & \mathrm{D}_2 \end{array}\right)$$

de tailles de blocs respectives

$$\begin{array}{c|c} n_1, p_1 & n_1, p_2 \\ \hline n_2, p_1 & n_2, p_2 \end{array} \quad \textit{et} \quad \begin{array}{c|c} p_1, q_1 & p_1, q_2 \\ \hline p_2, q_1 & p_2, q_2 \end{array}$$

Alors, on a l'égalité
$$\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2 = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A}_1\mathrm{A}_2 + \mathrm{B}_1\mathrm{C}_2 & \mathrm{A}_1\mathrm{B}_2 + \mathrm{B}_1\mathrm{D}_2 \\ \hline \mathrm{C}_1\mathrm{A}_2 + \mathrm{D}_1\mathrm{C}_2 & \mathrm{C}_1\mathrm{B}_2 + \mathrm{D}_1\mathrm{D}_2 \end{array}\right)$$

Démonstration. On pose $u : \mathrm{X} \in \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n, \mathrm{X} \mapsto \mathrm{M}_1\mathrm{X}$ et $v : \mathrm{X} \in \mathbb{K}^q \to \mathbb{K}^p, \mathrm{X} \mapsto \mathrm{N}_2\mathrm{X}$ (on confond colonne et matrice colonne). Pour $\mathrm{X} = \left(\begin{array}{c} \mathrm{X}_1 \\ \hline \mathrm{X}_2 \end{array}\right)$ par blocs de taille $q_1 + q_2$, on a

$$u \circ v(\mathrm{X}) = u\left(\begin{array}{c} \mathrm{A}_2\mathrm{X}_1 + \mathrm{B}_2\mathrm{X}_2 \\ \hline \mathrm{C}_2\mathrm{X}_1 + \mathrm{D}_2\mathrm{X}_2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} (\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2 + \mathrm{B}_1\mathrm{C}_2)\mathrm{X}_1 + (\mathrm{A}_1\mathrm{B}_2 + \mathrm{B}_1\mathrm{D}_2)\mathrm{X}_2 \\ \hline (\mathrm{C}_1\mathrm{A}_2 + \mathrm{D}_1\mathrm{C}_2)\mathrm{X}_1 + (\mathrm{C}_1\mathrm{B}_2 + \mathrm{D}_1\mathrm{D}_2)\mathrm{X}_2 \end{array}\right)$$

et comme $\operatorname{mat}_{\mathscr{C}_q,\mathscr{C}_n}(u \circ v) = \operatorname{mat}_{\mathscr{C}_p,\mathscr{C}_n} u \times \operatorname{mat}_{\mathscr{C}_q,\mathscr{C}_p} v$ avec les familles $\mathscr{C}_q$, $\mathscr{C}_p$ et $\mathscr{C}_n$ bases respectives de $\mathbb{K}^q$, $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$, on en déduit le résultat attendu. $\square$

Remarque : Le résultat se généralise pour des matrices avec plus de quatre blocs et des dimensions compatibles pour le produit des blocs.

Proposition 30. *Soient* $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_r(\mathbb{K})$, $\mathrm{B} \in \mathscr{M}_{r,s}(\mathbb{K})$, $\mathrm{C} \in \mathscr{M}_s(\mathbb{K})$ *et* $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ *avec* $n = r+s$ *la matrice par blocs* $\mathrm{M} = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \hline 0 & \mathrm{C} \end{array}\right)$. *On a*

$$\det(\mathrm{M}) = \det(\mathrm{A})\det(\mathrm{C})$$

Démonstration. On observe

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \hline 0 & \mathrm{C} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_r & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{C} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \hline 0 & \mathrm{I}_s \end{array}\right)$$

et par récurrence sur les tailles des blocs identités (en développant respectivement selon la première et la dernière ligne), on montre

$$\det\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_r & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{C} \end{array}\right) = \det(\mathrm{C}) \quad \text{et} \quad \det\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \hline 0 & \mathrm{I}_s \end{array}\right) = \det(\mathrm{A})$$

Le résultat suit. □

Remarque : Par récurrence sur le nombre de blocs diagonaux, on en déduit que le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs (et donc *a fortiori* diagonale par blocs) est le produit des déterminants des blocs.

Définition 17. *Soient* A, B, C *et* D *des matrices de* $\mathscr{M}_r(\mathbb{K})$. *On appelle* transvections par blocs *la transformation de* $\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \hline \mathrm{C} & \mathrm{D} \end{array}\right)$ *en* $\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A} & \mathrm{B}+\lambda\mathrm{A} \\ \hline \mathrm{C} & \mathrm{D}+\lambda\mathrm{C} \end{array}\right)$ *ou* $\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \hline \mathrm{C}+\lambda\mathrm{A} & \mathrm{D}+\lambda\mathrm{B} \end{array}\right)$ *avec* $\lambda \in \mathbb{K}$.

Proposition 31. *Une transvection par blocs conserve le déterminant.*

Démonstration. On reprend les notations de la définition 17. On observe

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A} & \mathrm{B}+\lambda\mathrm{A} \\ \hline \mathrm{C} & \mathrm{D}+\lambda\mathrm{C} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \hline \mathrm{C} & \mathrm{D} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_r & \lambda\mathrm{I}_r \\ \hline 0 & \mathrm{I}_r \end{array}\right)$$

et

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \hline \mathrm{C}+\lambda\mathrm{A} & \mathrm{D}+\lambda\mathrm{B} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_r & 0 \\ \hline \lambda\mathrm{I}_r & \mathrm{I}_r \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \hline \mathrm{C} & \mathrm{D} \end{array}\right)$$

Le résultat suit par passage au déterminant. □

V Endomorphismes remarquables

1 Homothéties

Définition 18. *On appelle* homothétie *de* E *tout élément de* $\mathrm{Vect}(\mathrm{id}) = \{\lambda\,\mathrm{id}, \lambda \in \mathbb{K}\}$.

Proposition 32. *Une homothétie commute avec tout endomorphisme de* E.

Démonstration. Immédiate. □

2 Projecteurs et symétries

Définition 19. *Soient* F, G *sev de* E *avec* $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$. *On appelle* projection *sur* F *parallèlement à* G *l'application notée* $p_{\mathrm{F},\mathrm{G}}$ *définie par*

$$p_{\mathrm{F},\mathrm{G}} : \mathrm{E} \to \mathrm{E},\ x = a + b \mapsto a \quad \textit{avec} \quad (a, b) \in \mathrm{F} \times \mathrm{G}$$

On appelle symétrie *par rapport à* F *parallèlement à* G *l'application notée* $s_{\mathrm{F},\mathrm{G}}$ *définie par*

$$s_{\mathrm{F},\mathrm{G}} : \mathrm{E} \to \mathrm{E},\ x = a + b \mapsto a - b \quad \textit{avec} \quad (a, b) \in \mathrm{F} \times \mathrm{G}$$

Remarque : De telles applications sont bien définies par existence et unicité du couple $(a, b) \in \mathrm{F} \times \mathrm{G}$ tel que $x = a + b$.

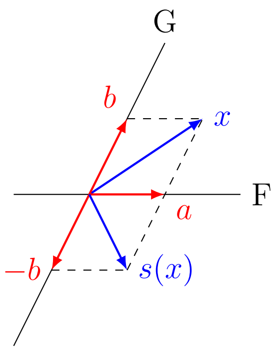

FIGURE 1 – Symétrie

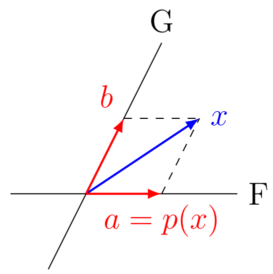

FIGURE 2 – Projection

Proposition 33. *Soient* F, G *des sev supplémentaires de* E. *On a* $p_{\mathrm{F},\mathrm{G}}$ *et* $s_{\mathrm{F},\mathrm{G}}$ *dans* $\mathscr{L}(\mathrm{E})$.

Définition 20. *On appelle* projecteur *un endomorphisme* $p \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ *vérifiant* $p^2 = p$ *et* involution linéaire *un endomorphisme* $s \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ *vérifiant* $s^2 = \mathrm{id}$.

Théorème 14. *Soit* $p \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. *On a l'équivalence*

$$p \textit{ projecteur} \iff p \textit{ projection}$$

Si p *est un projecteur, on a* $\mathrm{E} = \mathrm{Im}\, p \oplus \mathrm{Ker}\, p$ *et* p *est la projection sur* $\mathrm{Im}\, p$ *parallèlement à* $\mathrm{Ker}\, p$.

Démonstration. Le sens indirect est immédiat. Réciproquement, pour p projecteur, on vérifie l'égalité $\mathrm{Im}\, p \cap \mathrm{Ker}\, p = \{0_{\mathrm{E}}\}$ puis pour $x \in \mathrm{E}$

$$x = \underbrace{p(x)}_{\in \mathrm{Im}\, p} + \underbrace{x - p(x)}_{\in \mathrm{Ker}\, p}$$

ce qui prouve $\mathrm{E} = \mathrm{Im}\, p + \mathrm{Ker}\, p$ d'où $\mathrm{E} = \mathrm{Im}\, p \oplus \mathrm{Ker}\, p$ et $p = p_{\mathrm{Im}\, p, \mathrm{Ker}\, p}$. □

Remarques : 1. Cette décomposition unique d'un $x \in \mathrm{E}$ s'obtient par une analyse/synthèse.
2. Pour $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$, la décomposition $\mathrm{E} = \mathrm{Im}\, f \oplus \mathrm{Ker}\, f$ n'est pas caractéristique d'un projecteur. En effet, pour $p \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ projecteur, la décomposition vaut pour tout $f = \alpha p$ avec $\alpha \in \mathbb{K}$.

Proposition 34. *Soit* $p \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. *On a*

$$p \textit{ projecteur} \iff \mathrm{id} - p \textit{ est le projecteur}$$

et dans ce cas $\qquad \mathrm{Im}\, p = \mathrm{Ker}\,(\mathrm{id} - p) \quad \textit{et} \quad \mathrm{Ker}\, p = \mathrm{Im}\,(\mathrm{id} - p)$

On dit que p *et* $\mathrm{id} - p$ *sont des projecteurs* associés.

Démonstration. La première équivalence est immédiate. Puis, pour $x \in \mathrm{E}$ et p projecteur, on a

$$x = p(x) + x - p(x) = \underbrace{(\mathrm{id} - q)(x)}_{\in \mathrm{Ker}\, q} + \underbrace{q(x)}_{\in \mathrm{Im}\, q} \quad \text{avec} \quad q = \mathrm{id} - p$$

et correspondance terme à terme dans l'égalité. Par unicité de la décomposition dans $\mathrm{Im}\, p \oplus \mathrm{Ker}\, p$ et $\mathrm{Ker}\, q \oplus \mathrm{Im}\, q$, on en déduit que le projecteur q projette sur $\mathrm{Ker}\, p$ parallèlement à $\mathrm{Im}\, p$. □

Proposition 35. *Le seul projecteur injectif de* E *est l'identité.*

Démonstration. Pour $x \in \mathrm{E}$, on a $p(p(x)) = p(x)$ d'où $p(x) = x$ par injectivité et le résultat suit. □

Théorème 15. *Soit* $s \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$*. On a l'équivalence*

$$s \text{ symétrie} \iff s^2 = \mathrm{id}$$

Si $s^2 = \mathrm{id}$*, alors on a* $\mathrm{E} = \mathrm{Ker}\,(s - \mathrm{id}) \oplus \mathrm{Ker}\,(s + \mathrm{id})$ *et* s *est la symétrie par rapport à* $\mathrm{Ker}\,(s - \mathrm{id})$ *parallèlement à* $\mathrm{Ker}\,(s + \mathrm{id})$.

Démonstration. Le sens direct est immédiat. Réciproquement, pour s involution linéaire, on vérifie l'égalité $\mathrm{Ker}\,(s - \mathrm{id}) \cap \mathrm{Ker}\,(s + \mathrm{id}) = \{0_{\mathrm{E}}\}$ puis pour $x \in \mathrm{E}$

$$x = \underbrace{\frac{1}{2}(\mathrm{id} + s)(x)}_{\in \mathrm{Ker}\,(\mathrm{id} - s)} + \underbrace{\frac{1}{2}(\mathrm{id} - s)(x)}_{\in \mathrm{Ker}\,(\mathrm{id} + s)}$$

ce qui prouve $\mathrm{E} = \mathrm{Ker}\,(s - \mathrm{id}) + \mathrm{Ker}\,(s + \mathrm{id})$ d'où $\mathrm{E} = \mathrm{Ker}\,(s - \mathrm{id}) \oplus \mathrm{Ker}\,(s + \mathrm{id})$ et $s = s_{\mathrm{Ker}\,(s - \mathrm{id}), \mathrm{Ker}\,(s + \mathrm{id})}$. □

Remarques : 1. Cette décomposition unique d'un $x \in \mathrm{E}$ s'obtient par une analyse/synthèse.
2. Pour $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$, la décomposition $\mathrm{E} = \mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{id}) \oplus \mathrm{Ker}\,(f + \mathrm{id})$ est caractéristique d'une symétrie.

Vocabulaire : Il est fréquent de confondre *projection* et *projecteur*, *symétrie* et *involution linéaire*.

Proposition 36. *Si* s *est une symétrie, alors* $p = \dfrac{1}{2}(\mathrm{id} + s)$ *est la projection sur* $\mathrm{Ker}\,(s - \mathrm{id})$ *parallèlement à* $\mathrm{Ker}\,(s + \mathrm{id})$*. Réciproquement, si* p *est un projecteur de* E*, alors* $s = 2p - \mathrm{id}$ *est la symétrie par rapport à* $\mathrm{Im}\, p$ *parallèlement à* $\mathrm{Ker}\, p$*. Le projecteur* p *et la symétrie* s *sont dits associés.*

Démonstration. Soit s symétrie. Pour $x \in \mathrm{E}$ avec $x = a + b$ et $(a, b) \in \mathrm{Ker}\,(s - \mathrm{id}) \times \mathrm{Ker}\,(s + \mathrm{id})$, on a

$$s(x) = a - b \quad \text{et} \quad p(x) = \frac{1}{2}(\mathrm{id} + s)(x) = a$$

d'où le résultat pour p. Réciproquement, si p est un projecteur, pour $x \in \mathrm{E}$ avec $x = a + b$ et $(a, b) \in \mathrm{Im}\, p \times \mathrm{Ker}\, p$, on a

$$p(x) = a \quad \text{et} \quad (2p - \mathrm{id})(x) = a - b$$

d'où le résultat pour s. □

Définition 21. *Soit p un projecteur et s une symétrie . Une base $\mathscr{B}$ obtenue par concaténation d'une base de* $\operatorname{Im} p$ *et d'une base de* $\operatorname{Ker} p$ *est dite* adaptée *à p. Si* E *est de dimension finie, on a* $\operatorname{mat}_{\mathscr{B}} p = \operatorname{diag}(\mathrm{I}_r, 0)$. *De même, une base $\mathscr{B}$ obtenue par concaténation d'une base de* $\operatorname{Ker}(s - \operatorname{id})$ *et d'une base de* $\operatorname{Ker}(s + \operatorname{id})$ *est dite* adaptée *à s. Si* E *est de dimension finie, on a* $\operatorname{mat}_{\mathscr{B}} s = \operatorname{diag}(\mathrm{I}_r, -\mathrm{I}_s)$

$$\operatorname{mat}_{\mathscr{B}} p = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & 1 & & & \\ \hline & & & 0 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{array}\right) \qquad \operatorname{mat}_{\mathscr{B}} s = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & 1 & & & \\ \hline & & & -1 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \end{array}\right)$$

3 Projecteurs et somme directe

Définition 22. *Soient* $\mathrm{F}_1, \ldots, \mathrm{F}_r$ *des sev de* E *tels que* $\mathrm{E} = \bigoplus_{k=1}^{r} \mathrm{F}_k$. *Pour* $k \in [\![1\,;\, r]\!]$, *on définit* p_k *le projecteur de* E *sur* F_k *parallèlement à* $\bigoplus_{j \in [\![1\,;\, r]\!] \smallsetminus \{k\}} \mathrm{F}_j$. *La famille de projecteurs* $(p_k)_{k \in [\![1\,;\, r]\!]}$ *est dite* associée *à la somme directe* $\mathrm{E} = \bigoplus_{k=1}^{r} \mathrm{F}_k$.

Remarque : Pour $k \in [\![1\,;\, r]\!]$, le projecteur p_k est bien défini puisqu'on a

$$\mathrm{E} = \mathrm{F}_k \oplus \left(\bigoplus_{j \in [\![1\,;\, r]\!] \smallsetminus \{k\}} \mathrm{F}_j \right)$$

Théorème 16. *Soit* $(p_k)_{k \in [\![1\,;\, r]\!]}$ *une famille de projecteurs associée à la somme directe* $\mathrm{E} = \bigoplus_{k=1}^{r} \mathrm{F}_k$. *On a*

$$\forall (i,j) \in [\![1\,;\, r]\!]^2 \quad \text{avec} \quad i \neq j \qquad p_i \circ p_j = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{r} p_k = \operatorname{id}$$

Démonstration. Soit $i \neq j$. Comme $\operatorname{Im} p_j = \mathrm{F}_j \subset \operatorname{Ker} p_i$, il s'ensuit $p_i \circ p_j = 0$ puis, pour $x = \sum_{i=1}^{r} x_i$, on a

$$\sum_{k=1}^{r} p_k \left(\sum_{i=1}^{r} x_i \right) = \sum_{1 \leqslant k, i \leqslant r} p_k(x_i)$$

Pour $k \neq i$, comme $x_i \in \mathrm{F}_i \subset \operatorname{Ker} p_k$, on a $p_k(x_i) = 0$ puis $p_k(x_k) = x_k$ puisque $x_k \in \mathrm{F}_k = \operatorname{Im} p_k = \operatorname{Ker}(\operatorname{id} - p_k)$ d'où

$$\sum_{k=1}^{r} p_k(x) = \sum_{k=1}^{r} p_k(x_k) = \sum_{k=1}^{r} x_k = x$$

autrement dit $\sum_{k=1}^{r} p_k = \operatorname{id}$. □

VI Matrices semblables

Dans ce qui suit, l'ensemble E désigne un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie égale à n.

1 Changement de base

Soient $\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2, \mathscr{B}_3$ des base de E, $\mathrm{P} = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_1}\mathscr{B}_2$ la matrice de passage de $\mathscr{B}_1$ à $\mathscr{B}_2$.

Proposition 37.
1. $\mathrm{P} = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_2,\mathscr{B}_1} \mathrm{id}$ *(attention à l'ordre)*
2. $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$
3. $\mathrm{P}^{-1} = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_2}\mathscr{B}_1$
4. $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_1}\mathscr{B}_3 = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_1}\mathscr{B}_2 \times \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_2}\mathscr{B}_3$

Proposition 38. *Soit $x \in \mathrm{E}$, $\mathrm{X}_1 = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_1}x$ et $\mathrm{X}_2 = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_2}x$, alors*

$$\mathrm{X}_1 = \mathrm{P}\mathrm{X}_2$$

Proposition 39. *Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$, $\mathrm{A}_1 = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_1}u$, $\mathrm{A}_2 = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_2}u$, alors*

$$\mathrm{A}_1 = \mathrm{P}\mathrm{A}_2\mathrm{P}^{-1}$$

2 Définitions

Définition 23. *Soient $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Les matrices A et B sont dites* semblables *s'il existe $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $\mathrm{A} = \mathrm{PBP}^{-1}$.*

Proposition 40. *La* similitude *(i.e. le fait que deux matrices soient semblables) est une relation d'équivalence.*

Démonstration. Sans difficulté, on vérifie que la relation est réflexive, symétrique, transitive. □

3 Propriétés

Proposition 41. *Toute matrice semblable à une matrice d'homothétie est égale à cette matrice.*

Démonstration. Immédiate en écrivant le produit matriciel. □

Théorème 17. *Soient $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $u_\mathrm{A} \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^n)$ avec $\mathrm{mat}_{\mathscr{C}}u_\mathrm{A} = \mathrm{A}$ où $\mathscr{C} = (e_1, \ldots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*
1. *A, B semblables ;*
2. *Il existe E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$, $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ bases de E tels que $\mathrm{A} = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_1}u$ et $\mathrm{B} = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_2}u$;*
3. *Il existe $\mathscr{B}$ base de $\mathbb{K}^n$ telle $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}u_\mathrm{A} = \mathrm{B}$;*

Démonstration. On a clairement (3) $\Longrightarrow$ (2) avec $\mathrm{E} = \mathbb{K}^n$, $u = u_\mathrm{A}$, $\mathscr{B}_1 = \mathscr{C}$ et $\mathscr{B}_2 = \mathscr{B}$. Le sens (2) $\Longrightarrow$ (1) est immédiat d'après les formules de changement de bases. Supposons A et B semblables. Soit $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $\mathrm{A} = \mathrm{PBP}^{-1}$. Notons $\mathrm{P} = (p_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et posons $\mathscr{B} = (\varepsilon_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ définie par : pour tout $j \in [\![1\,;\,n]\!]$, $\varepsilon_j = \sum\limits_{i=1}^{n} p_{i,j}e_i$. Alors, on a $\mathrm{mat}_{\mathscr{C}}\mathscr{B} = \mathrm{P}$ matrice inversible donc $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{K}^n$ et d'après les formules de changement de base, il vient

$$\mathrm{B} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}u_\mathrm{A}$$

ce qui prouve (1) $\Longrightarrow$ (3). □

Corollaire 1. *Deux matrices semblables ont même trace, même rang, même déterminant.*

Démonstration. Conséquence immédiate du théorème précédent. $\square$

Remarque : La contraposée est très utile. La réciproque est fausse. Considérer I_n et $\mathrm{I}_n + \mathrm{E}_{1,n}$ pour $n \geqslant 2$.

Exemple : Étudier la similitude des matrices suivantes

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si A et B sont semblables, notant u canoniquement associé à A, on aurait

$$2 = \mathrm{rg}\,(\mathrm{A} - \mathrm{I}_3) = \mathrm{rg}\,(u - \mathrm{id}\,) = \mathrm{rg}\,(\mathrm{B} - \mathrm{I}_3) = 1$$

ce qui est absurde. Soit v canoniquement associé à B. Dans $\mathscr{B} = (e_2, e_1, e_3)$, on a $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} v = \mathrm{C}$ d'où C et B semblables.

Remarque : Il existe un résultat plus général : pour $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on a A semblable à $\mathrm{A}^\top$. Ce résultat est hors-programme et difficile à établir (requiert la réduction de Jordan ou la décomposition de Frobenius).

VII Sous-espaces stables

1 Définitions

Définition 24. *Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ et F un sev de E. Le sev F est dit* stable *par u si $u(\mathrm{F}) \subset \mathrm{F}$, i.e. $u(x) \in \mathrm{F}$ pour tout $x \in \mathrm{F}$.*

Exemples : Les sev triviaux $\{0_\mathrm{E}\}$ et E sont stables par tout endomorphisme, le noyau et l'image (éventuellement triviaux) sont stables par un endomorphisme, ...

Définition 25. *Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ et F un sev stable par u. La* restriction *de u à F notée $u_{|\mathrm{F}}$ induit un endomorphisme de F noté $u_\mathrm{F} : \mathrm{F} \to \mathrm{F}, x \mapsto u(x)$ appelé* endomorphisme induit *par u sur F.*

2 Interprétation matricielle

Proposition 42. *Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$, F un sev de E avec $\dim \mathrm{F} = m$, $\mathscr{B}_\mathrm{F}$ une base de F complétée en $\mathscr{B}$ base de E. On a*

$$\mathrm{F} \textit{ stable par } u \iff \mathrm{mat}_{\mathscr{B}} u = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \hline 0 & \mathrm{C} \end{array}\right) \quad \textit{avec} \quad \mathrm{A} \in \mathscr{M}_m(\mathbb{K})$$

Dans ce cas, on a $\mathrm{A} = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_\mathrm{F}} u_\mathrm{F}$.

Démonstration. On a
$$u(\mathrm{F}) \subset \mathrm{F} \iff u(\mathscr{B}_\mathrm{F}) \in \mathrm{F}^m = \mathrm{Vect}\,(\mathscr{B}_\mathrm{F})^m$$
d'où le résultat. $\square$

Proposition 43. *Soit* E *un* $\mathbb{K}$*-ev de dimension finie,* $\mathrm{F}_1, \dots, \mathrm{F}_r$ *des sev de* E *tels que* $\mathrm{E} = \bigoplus_{k=1}^{r} \mathrm{F}_k$*,* $\mathscr{B} = \biguplus_{k=1}^{r} \mathscr{B}_k$ *une base adaptée à cette décomposition et* $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$*. Les sev* F_k *sont stables par* u *si et seulement si*

$$\operatorname{mat}_{\mathscr{B}} u = \operatorname{diag}(\mathrm{A}_1, \dots, \mathrm{A}_r) \quad \textit{avec} \quad \mathrm{A}_k \in \mathscr{M}_{m_k}(\mathbb{K}) \quad \textit{et} \quad m_k = \dim \mathrm{F}_k$$

Dans ce cas, on a $\mathrm{A}_k = \operatorname{mat}_{\mathscr{B}_k} u_{\mathrm{F}_k}$ *pour tout* $k \in [\![1 ; r]\!]$*.*

Démonstration. On a

$$\forall k \in [\![1 ; r]\!] \quad u(\mathrm{F}_k) \subset \mathrm{F}_k \iff \forall k \in [\![1 ; r]\!] \qquad u(\mathscr{B}_k) \in \mathrm{F}_k^{m_k} = \operatorname{Vect}(\mathscr{B}_k)^{m_k}$$

d'où le résultat.

$$\operatorname{mat}_{\mathscr{B}} u = \begin{pmatrix} \boxed{\mathrm{A}_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{\mathrm{A}_r} \end{pmatrix}$$

□