Commentaires - Devoir en temps libre n°2

Remarques générales : Une fonction peut être prolongeable par continuité en un point, cela ne signifie pas qu'elle soit définie en ce point (borne ouverte donc). Les notations $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,\cdot)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(\cdot,t)$ désignent des fonctions et non leur expression en t ou en x. On n'additionne pas des équivalents et les règles de composition d'équivalents sont très délimités (fonctions puissances, valeur absolue, logarithme avec justification). Pour un changement de variables non trivial comme $u=\tan\left(\dfrac{t}{2}\right)$, les hypothèses doivent être mentionnées précisément et les intervalles considérés sont ouverts (voir remarque du cours). Une domination locale sur X un segment ne présente aucun intérêt, le sous-segment pouvant être le segment X lui-même.

Problème I

Premier problème moyennement réussi, notamment l'usage des comportements asymptotiques pour la détermination de constantes d'intégration.

1. Il y a <u>deux</u> questions : continuité sur $[\,0\,;+\infty\,[$ et caractère $\mathscr{C}^2$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$. Le point zéro joue donc un rôle particulier en lequel il y aura sans doute une difficulté spécifique. Beaucoup de points perdu ici, la continuité étant traitée trop souvent à la va-vite. Tous les comportements asymptotiques doivent être détaillés : par exemple développement limité de $1-\cos(t)$, ... Les hypothèses de régularité $\mathscr{C}^2$ sous l'intégrale sont souvent incomplètes : il faut établir l'intégrabilité de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,\cdot)$ (attention à respecter l'usage des notations). Pour la domination, il faut faire preuve de plus d'attention : l'inégalité $1-\cos(t)\leqslant 1$ pour $t>0$ est bien sûr fausse. La gestion des signes est également hasardeuse : on a $cos(t)-1\leqslant 0$ pour tout t réel.

2. On pouvait faire sans convergence dominée (voir corrigé) mais dans ce cas, les bons outils sont : inégalité de Taylor-Lagrange et inégalité des accroissements finis. Pour procéder par convergence dominée, on peut exploiter la domination établie pour la continuité de F (sous réserve qu'elle soit correcte) puis, il faut impérativement réaliser une domination pour F' qui n'a pas été faite antérieurement. Par ailleurs, si on procède localement pour la domination (indispensable pour F'), comme on veut faire tendre $x\to+\infty$, on doit travailler sur un intervalle de la forme $[\,a\,;+\infty\,[$ avec $a>0$.

3. Attention : on ne peut pas écrire $\mathrm{F}'(x)-\mathrm{F}'(0)=\displaystyle\int_0^x \mathrm{F}''(u)\,\mathrm{d}u$ pour $x\geqslant 0$ puisqu'on a seulement établi la régularité $\mathscr{C}^2$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$. Il faut primitiver puis déterminer la constante d'intégration en utilisant $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\mathrm{F}'(x)$.

4. Même remarque que plus haut : on primitive puis on détermine la constante d'intégration avec le comportement asymptotique. Signalons qu'on pouvait bien évidemment dériver l'expression fournie dans le sujet. On conclut en exploitant la continuité en zéro.

Problème II

1. Question non comprise dans la quasi-totalité des copies. L'intervalle d'intégration est $\left]0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$ car le paramètre x peut prendre la valeur -1. Comme le paramètre x peut prendre des valeurs négatives, on a

$$\forall (x,t)\in \mathrm{X}\times\mathrm{I} \qquad |\ln(1+x\cos t)| \leqslant \max\left(-\ln(1-\cos t), \ln(1+\cos t)\right) = -\ln(1-\cos t)$$

2. Bien traitée.

3. Question un peu technique, on pouvait évidemment exploiter l'expression fournie dans le sujet pour la comparer à la primitive obtenue à l'issue du changement de variables $u=\tan\left(\dfrac{t}{2}\right)$.