ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Feuille d'exercices n°18

Exercice 1 (**)

Soit E $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, f, $g \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ tels que $g \circ f = 0$ et $f + g \in \mathrm{GL}(\mathrm{E})$.

Montrer $$\mathrm{rg}\,(f) + \mathrm{rg}\,(g) = \dim \mathrm{E} \quad \text{et} \quad \mathrm{E} = \mathrm{Im}\ f \oplus \mathrm{Im}\ g$$

Corrigé : On a $\quad \mathrm{E} = \mathrm{Im}\,(f+g) \subset \mathrm{Im}\ f + \mathrm{Im}\ g \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{Im}\ f + \mathrm{Im}\ g = \mathrm{E}$

Puis, d'après la formule de Grassmann, on a
$$\mathrm{rg}\,(f) + \mathrm{rg}\,(g) \geqslant \dim \mathrm{Im}\ f + \mathrm{Im}\ g = \dim \mathrm{E}$$
Par ailleurs, comme $g \circ f = 0$, alors $\mathrm{Im}\ f \subset \mathrm{Ker}\ f$ puis le théorème du rang donne
$$\dim \mathrm{E} = \mathrm{rg}\,(f) + \dim \mathrm{Ker}\ f \geqslant \mathrm{rg}\,(f) + \mathrm{rg}\,(g)$$

En particulier, on a $$\mathrm{rg}\,(f) + \mathrm{rg}\,(g) = \dim \mathrm{Im}\ f + \mathrm{Im}\ g$$
et toujours avec la formule de Grassmann, on conclut
$$\boxed{\mathrm{rg}\,(f) + \mathrm{rg}\,(g) = \dim \mathrm{E} \quad \text{et} \quad \mathrm{E} = \mathrm{Im}\ f \oplus \mathrm{Im}\ g}$$

Exercice 2 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

1. Montrer qu'il existe une unique famille $(e_i^*)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathbb{K})^n$ telle que
$$\forall (i,j) \in [\![1\,;\,n]\!]^2 \qquad e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}$$
2. Justifier que $(e_i^*)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une base de $\mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathbb{K})$ sans utiliser $\dim \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathbb{K})$.

Corrigé : 1. La famille $\mathscr{B}$ étant une base, pour $i \in [\![1\,;\,n]\!]$, il existe une unique forme linéaire e_i^* telle que $e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}$ et par conséquent

$$\boxed{\text{Il existe une unique famille } (e_i^*)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathbb{K})^n \text{ telle que } e_i^*(e_j) = \delta_{i,j} \text{ pour tout } (i,j) \in [\![1\,;\,n]\!]^2.}$$

2. Soit $(\alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathbb{K}^n$ tel que $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i e_i^* = 0_{\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathbb{K})}$. Pour $k \in [\![1\,;\,n]\!]$, il vient
$$\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i^*\right)(e_k) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \delta_{i,k} = \alpha_k = 0$$
ce qui prouve la liberté de la famille. Soit $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathbb{K})$. Sans difficulté, on vérifie que la forme $f - \sum\limits_{k=1}^{n} f(e_k) e_k^*$ s'annule sur la base $\mathscr{B}$ ce qui prouve sa nullité et donc le caractère générateur de $(e_i^*)_{1\leqslant i\leqslant n}$ pour $\mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathbb{K})$. On conclut
$$\boxed{\text{La famille } (e_i^*)_{1\leqslant i\leqslant n} \text{ est une base de } \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathbb{K}).}$$

Remarque : La base $\mathscr{B}^* = (e_i^*)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est appelée *base duale* de la base $\mathscr{B}$. On en déduit notamment l'égalité fondamentale
$$\dim \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathbb{K}) = \dim \mathrm{E}$$

Exercice 3 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ une famille libre de formes linéaires sur E. On pose

$$\Phi\colon \begin{cases} \mathrm{E} \longrightarrow \mathbb{K}^n \\ x \longmapsto (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)) \end{cases}$$

1. Montrer que l'application Φ est un isomorphisme.
2. En déduire l'existence d'une base $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ *antéduale* à $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, c'est-à-dire vérifiant

$$\forall (i,j) \in [\![1\,;\, n]\!]^2 \qquad \varphi_i(\varepsilon_j) = \delta_{i,j}$$

Corrigé : 1. On a clairement $\Phi \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathbb{K}^n)$. Supposons l'application Φ non surjective. Il existe alors un hyperplan de $\mathbb{K}^n$ contenant $\mathrm{Im}\,\Phi$ ce qui équivaut à l'existence de $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ scalaires non tous nuls tels que

$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k(x) = 0_{\mathrm{E}}$$

autrement dit $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k = 0$ et contredit la liberté de $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$. Par conséquent, l'application Φ est surjective entre deux espaces de même dimension d'où

$$\boxed{\text{L'application } \Phi \text{ est un isomorphisme.}}$$

2. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Pour tout $j \in [\![1\,;\, n]\!]$, il existe $\varepsilon_j \in \mathrm{E}$ tel que $\Phi(\varepsilon_j) = e_j$, c'est-à-dire $\varphi_i(\varepsilon_j) = \delta_{i,j}$ pour $i \in [\![1\,;\, n]\!]$. On conclut

$$\boxed{\text{Il existe une base antéduale à } (\varphi_1, \ldots, \varphi_n).}$$

Exercice 4 (***)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ avec n entier non nul, $\mathrm{A} \in \mathrm{E}$. Résoudre en l'inconnue $\mathrm{X} \in \mathrm{E}$ l'équation

$$\mathrm{X} + \mathrm{X}^\top = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{X})\mathrm{A} \tag{L}$$

Corrigé : Soit X solution de (L). On a

$$\mathrm{X} + \mathrm{X}^\top = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{X})\mathrm{A} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{Tr}\left(\mathrm{X} + \mathrm{X}^\top\right) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{X}) \times \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}) \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{Tr}\,(\mathrm{X})(2 - \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A})) = 0$$

• Si $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{X}) = 0$, alors $\mathrm{X}+\mathrm{X}^\top = 0$ d'où $\mathrm{X} \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ et réciproquement, une matrice antisymétrique est solution de (E).
• Si $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{X}) \neq 0$, alors $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}) = 2$. On pose

$$\forall \mathrm{X} \in \mathrm{E} \qquad \varphi(\mathrm{X}) = \frac{1}{2}(\mathrm{X} + \mathrm{X}^\top)$$

Par analyse/synthèse, on a la décomposition de $\mathrm{X} \in \mathrm{E}$ dans la somme directe $\mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ donnée par

$$\mathrm{X} = \underbrace{\frac{1}{2}(\mathrm{X} + \mathrm{X}^\top)}_{\in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})} + \underbrace{\frac{1}{2}(\mathrm{X} - \mathrm{X}^\top)}_{\in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})}$$

Il s'ensuit que φ est le projecteur sur $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ parallèlement à $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$. On a

$$\mathrm{X} + \mathrm{X}^\top = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{X})\mathrm{A} \iff \varphi(\mathrm{X}) = \frac{\mathrm{Tr}\,(\mathrm{X})}{2}\mathrm{A}$$

Comme $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{X}) \neq 0$, on a $\mathrm{A} \in \mathrm{Im}\ \varphi = \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et d'après les propriétés d'un projecteur,

$$\varphi\left(\frac{\mathrm{Tr}\,(\mathrm{X})}{2}\mathrm{A}\right) = \frac{\mathrm{Tr}\,(\mathrm{X})}{2}\mathrm{A}$$

Il s'ensuit $$\varphi(\mathrm{X}) = \frac{\mathrm{Tr}\,(\mathrm{X})}{2}\mathrm{A} \iff \mathrm{X} - \frac{\mathrm{Tr}\,(\mathrm{X})}{2}\mathrm{A} \in \mathrm{Ker}\ \varphi = \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$$

D'où $$\mathrm{X} = \lambda\mathrm{A} + \mathrm{B} \quad \text{avec} \quad (\lambda, \mathrm{B}) \in \mathbb{R} \times \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$$

Réciproquement, on a

$$\forall (\lambda, \mathrm{B}) \in \mathbb{R} \times \mathscr{A}_n(\mathbb{R}) \qquad \varphi(\lambda\mathrm{A} + \mathrm{B}) = \lambda\mathrm{A} = \frac{\mathrm{Tr}\,(\lambda\mathrm{A} + \mathrm{B})}{2}\mathrm{A}$$

Notant $\mathrm{S_E}$ l'ensemble des solutions de E, on conclut

$$\boxed{\text{Si } \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}) \neq 2 \text{ ou } \mathrm{A} \notin \mathscr{S}_n(\mathbb{R}), \text{ alors } \mathrm{S_L} = \mathscr{A}_n(\mathbb{R}) \text{ et sinon } \mathrm{S_L} = \{\lambda\mathrm{A} + \mathrm{B}, \mathrm{B} \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})\}.}$$

Exercice 5 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. Montrer qu'il existe $v \in \mathrm{GL}(\mathrm{E})$ et p projecteur de E tel que $u = v \circ p$.

Corrigé : Soit $\mathscr{B}$ une base de E et $\mathrm{A} = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}} u$. On dispose de P et Q dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telles que $\mathrm{A} = \mathrm{PJ}_r\mathrm{Q}$ d'où $\mathrm{A} = \mathrm{PQQ}^{-1}\mathrm{J}_r\mathrm{Q}$. On a $\mathrm{PQ} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{Q}^{-1}\mathrm{J}_r\mathrm{Q}$ semblable à J_r ce qui prouve qu'il s'agit d'une matrice de projection. Considérant v et p dans $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ tels que $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} v = \mathrm{PQ}$ et $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} p = \mathrm{Q}^{-1}\mathrm{JQ}$, on conclut

$$\boxed{\text{Il existe } v \in \mathrm{GL}(\mathrm{E}) \text{ et } p \text{ projecteur tel que } u = v \circ p.}$$

Variante : Soit S un supplémentaire de Ker u et S′ un supplémentaire de Im u. Les sev Ker u et S′ ont même dimension donc sont isomorphes. Soit $\varphi : \mathrm{Ker}\ u \to \mathrm{S}'$ un tel isomorphisme. On note p le projecteur sur S parallèlement à Ker u et on pose $v = u \circ p + \varphi \circ (\mathrm{id} - p)$. On a clairement $v \circ p = u$ puis, pour $x \in \mathrm{E}$

$$\begin{aligned} v(x) = 0_{\mathrm{E}} &\iff \underbrace{u(p(x))}_{\in \mathrm{Im}\ u} + \underbrace{\varphi \circ (\mathrm{id} - p)(x)}_{\in \mathrm{S}'} = 0_{\mathrm{E}} \\ &\implies u(p(x)) = 0_{\mathrm{E}} \quad \text{et} \quad \varphi \circ (\mathrm{id} - p)(x) = 0_{\mathrm{E}} \\ v(x) = 0_{\mathrm{E}} &\implies p(x) \in \mathrm{Ker}\ u \quad \text{et} \quad (\mathrm{id} - p)(x) = 0_{\mathrm{E}} \end{aligned}$$

Il en résulte que $p(x) = 0_{\mathrm{E}}$ et $x - p(x) = 0_{\mathrm{E}}$ d'où $x = 0_{\mathrm{E}}$. Comme v est un endomorphisme injectif en dimension finie, on conclut

$$\boxed{\text{Il existe } v \in \mathrm{GL}(\mathrm{E}) \text{ et } p \text{ projecteur tel que } u = v \circ p.}$$

Exercice 6 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$.

1. Montrer que u admet au moins deux sev stables.
2. On suppose u non nul et non injectif.
   (a) Montrer que u admet au moins trois sev stables.
   (b) Si $\dim \mathrm{E}$ est impaire, montrer que u admet au moins quatre sev stables.
   (c) Donner un exemple d'endomorphisme qui admet exactement trois sev stables.

Corrigé : 1. $\{0_E\}$ et E sont des sev stables.

2.(a) On a Ker $u \neq \{0_E\}$ et Ker $u \neq$ E. Par ailleurs, on a sans difficulté $u(\text{Ker } u) \subset \text{Ker } u$. Ainsi

$$\boxed{\text{L'endomorphisme } u \text{ admet au moins trois sev stables.}}$$

2.(b) De même, on vérifie que Im u est stable par u. D'après le théorème du rang, on a

$$\dim \text{Im } u = \dim \text{E} - \dim \text{Ker } u < \dim \text{E}$$

et Im $u \neq \{0_E\}$ puisque u non nul. Enfin, si Ker $u =$ Im u, alors $\dim \text{E} = 2\,\text{rg}\,(u)$ est paire ce qui est faux. Par conséquent

$$\boxed{\text{Les sev } \{0\}, \text{E, Ker } u \text{ et Im } u \text{ sont quatre sev stables distincts.}}$$

2.(c) On a va précisément choisir u tel que Ker $u =$ Im u. On considère u canoniquement associé à $\text{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 7 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ des formes linéaires sur E. On pose

$$\forall x \in \text{E} \qquad \Phi(x) = (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))$$

Montrer $$\Phi \text{ surjective} \iff (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \text{ libre}$$

Corrigé : Supposons Φ surjective. Soit $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i = 0$. On note $\mathscr{C} = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Par surjectivité, pour $i \in [\![1\,;\, n]\!]$, il existe $x_i \in$ E tel que $\Phi(x_i) = e_i$. Par suite

$$\forall k \in [\![1\,;\, n]\!] \qquad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underbrace{\varphi_i(x_k)}_{\delta_{i,k}} = \alpha_k = 0$$

d'où la liberté de $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$. Supposons φ non surjective. On a donc rg $\Phi < n$. Par conséquent, on peut trouver un hyperplan H de $\mathbb{K}^n$ contenant Im Φ. On dispose de $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{0_{\mathbb{K}^n}\}$ tel que H est décrit par l'équation $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0$. Comme Im $\Phi \subset$ H, on a

$$\forall x \in \text{E} \qquad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i(x) = 0$$

d'où $$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i = 0$$

ce qui prouve le caractère lié de $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$. On conclut

$$\boxed{\Phi \text{ surjective} \iff (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \text{ libre}}$$

Exercice 8 (****)

Soit n entier non nul et $\text{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer que si rg M = 1, alors $\text{M}^2 = \text{Tr}\,(\text{M})\text{M}$.

   Dans ce qui suit, on suppose que M vérifie la relation $\text{M}^2 = \text{Tr}\,(\text{M})\text{M}$.

2. Si $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{M}) \neq 0$, montrer que $\mathrm{rg}\,(\mathrm{M}) = 1$. On pourra considérer $\mathrm{A} = \dfrac{1}{\lambda}\mathrm{M}$ avec $\lambda = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{M})$.
3. Si $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{M}) = 0$, décrire les classes de similitude de M.

Corrigé : 1. Il existe une colonne X de M non nulle. Toutes les autres colonnes de M sont colinéaires à celle-ci d'où $\mathrm{M} = (y_1\mathrm{X}|\dots|y_n\mathrm{X}) = \mathrm{X}\mathrm{Y}^\top$ avec Y dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Puis, avec l'associativité du produit matriciel, il vient

$$\mathrm{M}^2 = (\mathrm{X}\mathrm{Y}^\top)(\mathrm{X}\mathrm{Y}^\top) = \mathrm{X}\underbrace{(\mathrm{Y}^\top\mathrm{X})}_{\in\mathbb{K}}\mathrm{Y}^\top = (\mathrm{Y}^\top\mathrm{X})\mathrm{M}$$

Or, d'après la propriété fondamentale de la trace, on a

$$\mathrm{Tr}\,(\mathrm{M}) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{X}\mathrm{Y}^\top) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{Y}^\top\mathrm{X}) = \mathrm{Y}^\top\mathrm{X}$$

Ainsi
$$\boxed{\mathrm{M}^2 = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{M})\mathrm{M}}$$

2. On suppose $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{M}) \neq 0$ et on note $\lambda = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{M})$ et $\mathrm{A} = \dfrac{1}{\lambda}\mathrm{M}$. On observe

$$\mathrm{A}^2 = \frac{1}{\lambda^2}\mathrm{M}^2 = \frac{1}{\lambda^2}\lambda\mathrm{M} = \mathrm{A}$$

La matrice A est donc matrice de projecteur. Or, pour un projecteur, en considérant une base adaptée à celui-ci, on obtient que son rang est égal à sa trace et on a clairement $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}) = 1$. On en déduit $\mathrm{rg}\,(\mathrm{A}) = 1$ et pour $\mathrm{M} = \lambda\mathrm{A}$ avec $\lambda \neq 0$, on conclut

$$\boxed{\text{Si } \mathrm{M}^2 = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{M})\mathrm{M} \text{ et } \mathrm{Tr}\,(\mathrm{M}) \neq 0, \text{ alors } \mathrm{rg}\ \mathrm{M} = 1.}$$

3. On suppose désormais $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{M}) = 0$. Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^n)$ canoniquement associé à M. On a $\mathrm{Im}\ u \subset \mathrm{Ker}\ u$. Soit $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r)$ une base de $\mathrm{Im}\ u$ que l'on complète en $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_q)$ base de $\mathrm{Ker}\ u$ ($q \geqslant r$). Puis, pour $i \in [\![1\,; r]\!]$, il existe $\varepsilon_{q+i} \in \mathrm{E}$ tel que $\varepsilon_i = u(\varepsilon_{q+i})$. On a $q + r = n$ d'après le théorème du rang. Notons $\mathscr{B} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ et montrons que c'est une famille libre. Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i\varepsilon_i = 0_\mathrm{E}$. On applique u et il vient

$$u\left(\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\right) = \sum_{i=q+1}^{n}\alpha_i u(\varepsilon_i) = \sum_{i=1}^{r}\alpha_{q+i}\varepsilon_i = 0_\mathrm{E}$$

On en déduit $\alpha_{q+1} = \ldots = \alpha_n = 0$ puis, par liberté de $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_q)$, on obtient la nullité des autres coefficients. Ainsi, la famille $\mathscr{B}$ est libre de cardinal n ce qui prouve que $\mathscr{B}$ est une base de E et on a

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} u = \mathrm{K}_r \quad \text{avec} \quad \mathrm{K}_r = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathrm{I}_r \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{et} \quad 2r \leqslant r + q = n$$

$$\boxed{\text{Si } \mathrm{M}^2 = 0, \text{ alors M est semblable avec } \mathrm{K}_r \text{ avec } 2r \leqslant n.}$$

Remarque : Dans le cas où $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{M}) = 0$, le rang n'est donc pas nécessairement 1 mais seulement $\leqslant n/2$.