ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Feuille d'exercices n°16

Exercice 1 (*)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

1. $\mathrm{E} = \mathrm{Im}\ f \oplus \mathrm{Ker}\ f$
2. $\mathrm{E} = \mathrm{Im}\ f + \mathrm{Ker}\ f$
3. $\mathrm{Im}\ f^2 = \mathrm{Im}\ f$
4. $\mathrm{Ker}\ f^2 = \mathrm{Ker}\ f$

Exercice 2 (*)

Soient E et F des $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $(f, g) \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})^2$. Montrer

$$|\mathrm{rg}\,(f) - \mathrm{rg}\,(g)| \leqslant \mathrm{rg}\,(f+g) \leqslant \mathrm{rg}\,(f) + \mathrm{rg}\,(g$$

Exercice 3 (*)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ avec A triangulaire supérieure stricte. Montre que $\mathrm{A}^n = 0$.

Exercice 4 (*)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ avec n entier non nul. On pose

$$\forall \mathrm{M} \in \mathrm{E} \qquad \varphi(\mathrm{M}) = \mathrm{M} - \frac{1}{n}\,\mathrm{Tr}\,(\mathrm{M})\mathrm{I}_n$$

Justifier que $\varphi \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ puis calculer φ^2 et $\mathrm{Tr}\ \varphi$.

Exercice 5 (*)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\Phi : \mathrm{E} \to \mathrm{E}, \mathrm{M} \mapsto \mathrm{M}^\top$. Calculer $\det \Phi$.

Exercice 6 (**)

Soient p et q des projecteurs de E. Montrer

$$p + q \text{ projecteur } \iff p \circ q = q \circ p = 0$$

Quand cette condition est réalisée, montrer que

$$\mathrm{Im}\ p + q = \mathrm{Im}\ p + \mathrm{Im}\ q \qquad \mathrm{Ker}\ p + q = \mathrm{Ker}\ p \cap \mathrm{Ker}\ q$$

Exercice 7 (**)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{H} \in \mathrm{E}$ avec $\mathrm{rg}\ \mathrm{H} = 1$.

1. Montrer que H est semblable à $\begin{pmatrix} \alpha_1 & \dots & \alpha_n \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ avec les α_i réels.
2. Montrer $\qquad \forall \mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \qquad \det(\mathrm{A} - \mathrm{H}) \det(\mathrm{A} + \mathrm{H}) \leqslant \det(\mathrm{A})^2$

Exercice 8 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et $f_1, \ldots, f_r$ des endomorphismes de E tels que $\sum\limits_{i=1}^{r} f_i = \mathrm{id}$ et $\sum\limits_{i=1}^{r} \mathrm{rg}\,(f_i) \leqslant n$. Montrer

$$\forall (i,j) \in [\![1\,;\, r]\!]^2 \qquad f_i \circ f_j = \delta_{i,j} f_i \quad \text{et} \quad \mathrm{E} = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Im}\ f_i$$

Exercice 9 (*)

Soient α, β dans $\mathbb{K}$ et $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ et $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour avoir A semblable à B.

Exercice 10 (**)

Soit n entier et $\mathrm{P}_k = \mathrm{X}^k(1-\mathrm{X})^{n-k}$ pour $k \in [\![0\,;\, n]\!]$. Montrer que $\mathscr{B} = (\mathrm{P}_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$. Déterminer les coordonnées de la base canonique $\mathscr{C} = (\mathrm{X}^k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ dans la base $\mathscr{B}$.

Exercice 11 (**)

Soient A, B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ semblables sur $\mathbb{C}$. Montrer que A et B sont semblables sur $\mathbb{R}$.

Exercice 12 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et F un sev de E de dimension $n-p$ ($p \leqslant n$). Montrer qu'il existe $\mathrm{H}_1, \ldots \mathrm{H}_p$ hyperplans de E tels que $\mathrm{F} = \bigcap\limits_{k=1}^{p} \mathrm{H}_k$.

Exercice 13 (**)

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ avec E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie. On note

$$\mathrm{G} = \{g \in \mathscr{L}(\mathrm{E}) \mid g \circ f = f \circ g = 0\}$$

Vérifier que G est un sev de $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ puis déterminer $\dim \mathrm{G}$.

Exercice 14 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. On note

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{N}_k = \mathrm{Ker}\ f^k \qquad \mathrm{I}_k = \mathrm{Im}\ f^k$$

1. Montrer que les suites $(\mathrm{I}_k)_k$ et $(\mathrm{N}_k)_k$ sont respectivement décroissante et croissante et qu'elles sont simultanément stationnaires.
2. On note r le rang à partir duquel les suites stationnent. Montrer $\mathrm{E} = \mathrm{I}_r \oplus \mathrm{N}_r$.
3. En déduire que toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est semblable à une matrice de la forme $\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{C} & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{N} \end{array}\right)$ où C une matrice carrée inversible et N est une matrice carré nilpotente.