ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

# Feuille d'exercices n°17

## Exercice 1 (**)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ avec $\operatorname{rg} \mathrm{A} = 1$ et $\operatorname{Tr}(\mathrm{A}) = 0$. Montrer que A est semblable à $\mathrm{E}_{1,n}$.

## Exercice 2 (**)

Soit $n$ entier non nul, $\mathrm{E} = \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$. Pour tout $i \in [\![ 0\,;\, n ]\!]$, on pose

$$\mathrm{F}_i = \{\mathrm{P} \in \mathrm{E} \mid \forall j \in [\![ 0\,;\, n ]\!] \setminus \{i\}\,, \mathrm{P}(j) = 0\}$$

Vérifier que les $\mathrm{F}_i$ sont des sev de E et montrer que $\mathrm{E} = \bigoplus_{i=0}^{n} \mathrm{F}_i$.

## Exercice 3 (***)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $\mathrm{A}^{n-1} \neq 0$ et $\mathrm{A}^n = 0$. Montrer que A est semblable à B avec

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & \vdots & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

## Exercice 4 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension $n$ entier non nul et $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. On suppose qu'il existe $x_0 \in \mathrm{E}$ tel que $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ base de E. On pose

$$\mathscr{C}(u) = \{v \in \mathscr{L}(\mathrm{E}) \mid v \circ u = u \circ v\}$$

1. Montrer que $\mathscr{C}(u)$ est une sous-algèbre de $\mathscr{L}(\mathrm{E})$.
2. Montrer $$\mathscr{C}(u) = \mathbb{K}_{n-1}[u]$$
3. Déterminer $\dim \mathscr{C}(u)$.

## Exercice 5 (**)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ avec $n$ entier non nul et $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathrm{E}^2$. On pose

$$\forall \mathrm{M} \in \mathrm{E} \qquad \Phi(\mathrm{M}) = \mathrm{AM} - \mathrm{MB}$$

1. Vérifier que $\Phi \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$.
2. Montrer $$\forall (\mathrm{M}, p) \in \mathrm{E} \times \mathbb{N} \qquad \Phi^p(\mathrm{M}) = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (-1)^k \mathrm{A}^{p-k} \mathrm{M} \mathrm{B}^k$$
3. Montrer que si A et B sont nilpotentes, alors $\Phi$ l'est aussi.

## Exercice 6 (***)

1. Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ tel que $(x, f(x))$ est liée pour tout $x \in \mathrm{E}$. Montrer que $f$ est une homothétie.
2. Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ de trace nulle. Montrer que A est semblable une matrice de diagonale nulle.

## Exercice 7 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension $n$ entier non nul.

1. Soient $u$, $v$ dans $\mathscr{L}(\mathrm{E})$. Montrer
$$\mathrm{rg}\,(v) - \mathrm{rg}\,(u \circ v) \leqslant \dim \mathrm{Ker}\ u$$
2. Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ nilpotent d'indice $p$.
   (a) Montrer que la suite $(\mathrm{Ker}\ u^k)_k$ croît strictement puis stationne.
   (b) Établir $$\frac{n}{p} \leqslant \dim \mathrm{Ker}\ u \leqslant n - p + 1$$

## Exercice 8 (***)

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ avec E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie tel que $f^3 = 0$.

1. Montrer $$\mathrm{rg}\ f + \mathrm{rg}\ f^2 \leqslant \dim \mathrm{E}$$
2. Montrer $$2\,\mathrm{rg}\ f^2 \leqslant \mathrm{rg}\ f$$

## Exercice 9 (***)

Soit $\mathrm{A} = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ avec $n \geqslant 2$.

1. On suppose $\forall i \in [\![ 1\,;\,n ]\!] \qquad |a_{i,i}| > \mathrm{R}_i \quad \text{avec} \quad \mathrm{R}_i = \sum_{j \in [\![ 1\,;\,n ]\!] \smallsetminus \{i\}} |a_{i,j}|$

   Montrer que $\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.
2. On considère $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ avec $a_{i,i} = 3$ et $a_{i,j} = 1$ si $|i - j| = 1$ et $a_{i,j} = 0$ si $|i - j| \geqslant 2$ pour $(i, j) \in [\![ 1\,;\,n ]\!]^2$. Montrer que la matrice A est inversible.

## Exercice 10 (***)

Déterminer les sev stables pour l'endomorphisme dérivation de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$.

## Exercice 11 (***)

Soient $f, g$ des projecteurs non nuls de E un $\mathbb{K}$-ev tels que
$$\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \mid f \circ g - g \circ f = \lambda f + \mu g$$
On suppose $(\lambda, \mu) \notin \{0, 1\}^2$.

1. Montrer que $\mathrm{Im}\ f \circ g \subset \mathrm{Im}\ g$ et que $\mathrm{Im}\ f \subset \mathrm{Im}\ g$.
2. Établir que $\lambda + \mu = 0$ puis $f \circ g = f$.
3. En déduire $f = g$.