ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Feuille d'exercices n°07

Exercice 1 (*)

Nature de la série de terme général :

1. $\mathrm{e}^{-\sqrt{\ln(n)}}$
2. $\ln(\mathrm{th}\,(n))$
3. $\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}$

Corrigé : 1. On a $\sqrt{\ln(n)} \leqslant \ln(n)$ pour $n \geqslant 3$ d'où

$$\forall n \geqslant 3 \qquad \mathrm{e}^{-\sqrt{\ln(n)}} \geqslant \frac{1}{n} \geqslant 0$$

Par comparaison $\boxed{\text{La série } \sum_{n\geqslant 1} \mathrm{e}^{-\sqrt{\ln(n)}} \text{ diverge.}}$

2. On a $\mathrm{th}\,(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ d'où

$$\ln(\mathrm{th}\,(n)) \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{th}\,(n) - 1 \quad \text{et} \quad \mathrm{th}\,(n) - 1 = \frac{\mathrm{e}^{n} - \mathrm{e}^{-n}}{\mathrm{e}^{n} + \mathrm{e}^{-n}} - 1 = \frac{-2\mathrm{e}^{-n}}{\mathrm{e}^{n} + \mathrm{e}^{-n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} -2\mathrm{e}^{-2n}$$

d'où

$$\ln(\mathrm{th}\,(n)) \underset{n\to+\infty}{\sim} -2\mathrm{e}^{-2n}$$

La série $\sum -2\mathrm{e}^{-2n}$ converge en tant que série géométrique de raison e^{-2} et d'après le critère des équivalents (licite, signe constant), on conclut

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geqslant 1} \ln(\mathrm{th}\,(n)) \text{ converge.}}$$

3. On a $$\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{n}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} - 1\right) = \mathrm{e}^{\frac{\ln(n)}{n}}\left(\frac{1}{n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$$

D'après le critère des équivalents pour des séries à termes positifs et d'après le critère de Riemann, on conclut

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geqslant 1} \sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n} \text{ converge.}}$$

Exercice 2 (**)

Nature de la série de terme général :

1. $\dfrac{\sum_{k=1}^{n} k!}{(n+1)!}$
2. $\mathrm{th}\,(n)^n$
3. $\dfrac{\ln(n)^n}{n!}$

Corrigé : 1. On a $$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n \geqslant \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$$

$$\boxed{\text{La série } \sum u_n \text{ diverge.}}$$

2. On a $$n\ln(\mathrm{th}\,(n)) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\,(\mathrm{th}\,(n)-1) = \frac{-2n\mathrm{e}^{-n}}{\mathrm{e}^{n}+\mathrm{e}^{-n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} -2n\mathrm{e}^{-2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

d'où $$\mathrm{th}\,(n)^n = \mathrm{e}^{n\ln(\mathrm{th}\,(n))} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

$$\boxed{\text{La série } \sum \mathrm{th}\,(n)^n \text{ diverge grossièrement.}}$$

3. Avec l'équivalent de Stirling, on a
$$\frac{\ln(n)^n}{n!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)^n \left(\frac{\mathrm{e}}{n}\right)^n \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$$

et $$\begin{aligned} n^2\ln(n)^n\left(\frac{\mathrm{e}}{n}\right)^n \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} &= \exp\left[2\ln(n) + n\ln(\ln(n)) + n - n\ln(n) - \frac{1}{2}\ln(2\pi n)\right] \\ &= \exp\left[-n\ln(n)(1+\mathrm{o}(1)\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \end{aligned}$$

d'où $$\frac{\ln(n)^n}{n!} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Par comparaison et critère de Riemann, on conclut

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)^n}{n!} \text{ converge.}}$$

Variante : On procéder sans l'équivalent de Stirling. Notant $u_n = \dfrac{\ln(n)^n}{n!}$ pour n entier non nul, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}\right)^n \frac{\ln(n+1)}{n+1}$$

et $$\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}\right)^n = \exp\left[n\ln\left(1+\frac{1}{\ln(n)}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)\right] = \exp\left(\frac{1}{\ln(n)}(1+\mathrm{o}(1)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

d'où $$\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

On conclut avec le critère de d'Alembert.

Exercice 3 (**)

Nature de la série de terme général :

1. $\sin\left(\pi\sqrt{1+n^2}\right)$ 2. $\sqrt{n+(-1)^n}-\sqrt{n}$ 3. $\sin\left(\pi(2+\sqrt{3})^n\right)$

Corrigé : 1. Avec le développement usuel $\sqrt{1+u} \underset{u\to 0}{=} 1 + \dfrac{u}{2} + \mathrm{O}(u^2)$, on trouve

$$\begin{aligned} u_n = \sin\left(\pi\sqrt{1+n^2}\right) &= \sin\left(\pi n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right) \\ &= \sin\left(\pi n\left(1+\frac{1}{2n^2}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)\right) \\ u_n = (-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{2n}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) &= (-1)^n\frac{\pi}{2n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^3}\right) \end{aligned}$$

La série $\sum\limits_{n\geqslant 1}(-1)^n\dfrac{\pi}{2n}$ converge car vérifie le critère des séries alternées et la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\mathrm{O}\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$ converge par critère de Riemann. Ainsi

$$\boxed{\text{La série } \sum \sin\left(\pi\sqrt{1+n^2}\right) \text{ converge.}}$$

2. Avec le développement usuel $\sqrt{1+u} = 1+\dfrac{u}{2}+\mathrm{O}(u^2)$, on obtient

$$\begin{aligned} u_n &= \sqrt{n+(-1)^n}-\sqrt{n} = \sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{(-1)^n}{n}}-1\right) \\ &= \sqrt{n}\left(1+\frac{(-1)^n}{2n}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \underbrace{\frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}}}_{v_n}+\underbrace{\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)}_{w_n} \end{aligned}$$

La série $\sum v_n$ est alternée avec $(|v_n|)_n$ décroissante de limite nulle d'où sa convergence et $\sum w_n$ converge par comparaison et critère de Riemann. On conclut

$$\boxed{\text{La série } \sum\left[\sqrt{n+(-1)^n}-\sqrt{n}\right] \text{ converge.}}$$

Remarque : On peut même calculer sa somme en considérant par exemple la somme partielle $\sum\limits_{k=0}^{2n+1} u_k$ avec n entier et en séparant les termes d'indices pairs et impairs.

3. On a

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \left(2+\sqrt{3}\right)^n+\left(2-\sqrt{3}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{n-k}\left[\left(\sqrt{3}\right)^k+\left(-\sqrt{3}\right)^k\right] = 2\underbrace{\sum_{0\leqslant 2k\leqslant n}\binom{n}{2k}2^{n-2k}3^k}_{=\mathrm{N}_n\in\mathbb{N}}$$

Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = \sin(\pi(2+\sqrt{3})^n) = \sin\left(2\pi\mathrm{N}_n-\pi\left(2-\sqrt{3}\right)^n\right) = -\sin\left(\pi\left(2-\sqrt{3}\right)^n\right)$$

D'où, avec $|\sin(u)| \leqslant |u|$ pour u réel, il vient

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad |u_n| \leqslant \pi(2-\sqrt{3})^n$$

Enfin, on a $1<3<4$ d'où $0<2-\sqrt{3}<1$. Par comparaison à une série géométrique de raison dans $]\,0\,;1\,[$, on conclut

$$\boxed{\text{La série } \sum\sin\left(\pi\left(2+\sqrt{3}\right)^n\right) \text{ converge absolument.}}$$

Exercice 4 (*)

Étudier la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 2}\dfrac{1}{n\ln(n)^\beta}$ en fonction du paramètre $\beta \in \mathbb{R}$.

Corrigé : Si $\beta \leqslant 0$, on a $\qquad \forall n \geqslant 2 \qquad \dfrac{1}{n\ln(n)^\beta} \geqslant \dfrac{1}{n}$

d'où la divergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 2}\dfrac{1}{n\ln(n)^\beta}$ par comparaison. Pour $\beta>0$, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t\ln(t)^\beta}$ est continue, décroissante, positive sur $[\,2\,;+\infty\,[$ donc, par comparaison série/intégrale, la série $\sum\limits_{n\geqslant 2}\dfrac{1}{n\ln(n)^\beta}$ est de même nature que l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)^\beta}$. Enfin, avec le changement $u=\ln(t)$, les intégrales $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)^\beta}$ et $\displaystyle\int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^\beta}$ sont de même nature. Ainsi, avec le critère de Riemann, on conclut

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\ln(n)^\beta} \text{ converge si et seulement si } \beta > 1.}$$

Exercice 5 (*)

Étudier la nature de la suite de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} - \ln(\ln(n))$.

Corrigé : Soit $n \geqslant 2$. Avec le développement usuel $\ln(1+u) = u + \mathrm{O}(u^2)$, on trouve

$$\begin{aligned} u_n - u_{n-1} &= \frac{1}{n\ln(n)} - \ln(\ln(n)) + \ln(\ln(n-1)) = \frac{1}{n\ln(n)} + \ln\left(\ln(n) + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right) - \ln(\ln(n)) \\ &= \frac{1}{n\ln(n)} + \ln\left(1 - \frac{1}{n\ln(n)} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2\ln(n)}\right)\right) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2\ln(n)}\right) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

Ainsi, la série $\sum_{n\geqslant 3} [u_n - u_{n-1}]$ converge et d'après le lien suite/série téléscopique, on conclut

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_n \text{ converge.}}$$

Exercice 6 (**)

Soit $\alpha > 0$. Nature des séries de terme général :

1. $\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}$
2. $\dfrac{1}{\sum_{k=1}^{n} k^\alpha}$
3. $\ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$

Corrigé : 1. On a

$$\frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n} = \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\left(1 - \frac{(-1)^n}{n^\alpha} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\right) = \underbrace{\frac{(-1)^n}{n^\alpha}}_{v_n} \underbrace{- \frac{1}{n^{2\alpha}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)}_{w_n}$$

La série $\sum v_n$ vérifie le critère des séries alternées. Puis

$$w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{n^{2\alpha}} < 0$$

Ainsi, d'après le critère des équivalents (licite, signe constant à partir d'un certain rang) et le critère de Riemann, on a

$$\sum w_n \text{ converge} \iff \alpha > \frac{1}{2}$$

On conclut $\boxed{\text{La série } \sum \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n} \text{ converge si et seulement si } \alpha > \dfrac{1}{2}.}$

2. Pour n entier non nul, on a d'après le théorème de convergence des sommes de Riemann appliqué à la fonction $t \mapsto t^\alpha$ continue sur $[\,0\,;1\,]$

$$\sum_{k=1}^{n} k^\alpha = n^{\alpha+1} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^\alpha \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

D'où
$$\frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n} k^{\alpha}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\alpha+1}{n^{\alpha+1}}$$

D'après le critère des équivalents (licite, signe constant) et le critère de Riemann, on conclut

$$\boxed{\text{La série } \sum \frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n} k^{\alpha}} \text{ converge pour tout } \alpha > 0.}$$

3. On a
$$\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^{\alpha}}\right) = \underbrace{\frac{(-1)^n}{n^{\alpha}}}_{v_n} \underbrace{-\frac{1}{2n^{2\alpha}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)}_{w_n}$$

La série $\sum v_n$ vérifie le critère des séries alternées. Puis

$$w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^{2\alpha}} < 0$$

Ainsi, d'après le critère des équivalents (licite, signe constant) et le critère de Riemann, on a

$$\sum w_n \text{ converge} \iff \alpha > \frac{1}{2}$$

On conclut
$$\boxed{\text{La série } \sum \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^{\alpha}}\right) \text{ converge si et seulement si } \alpha > \frac{1}{2}.}$$

Exercice 7 (**)

Soit $f \in \mathscr{C}_{pm}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ fonction décroissante de limite nulle en $+\infty$. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t$$

Étudier la nature de la série $\sum u_n$ puis la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t$.

Corrigé : La fonction f est décroissante de limite nulle donc positive. Avec le changement de variables $u = t - n\pi$, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = \int_0^{\pi} f(u+n\pi)\sin(u+n\pi)\,\mathrm{d}u = (-1)^n \int_0^{\pi} f(u+n\pi)\sin(u)\,\mathrm{d}u$$

La série $\sum u_n$ est donc alternée. Par décroissance de f, on a

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \int_0^{\pi} f(u+(n+1)\pi)\sin(u)\,\mathrm{d}u \leqslant \int_0^{\pi} f(u+n\pi)\sin(u)\,\mathrm{d}u$$

et
$$0 \leqslant \int_0^{\pi} f(u+n\pi)\sin(u)\,\mathrm{d}u \leqslant \int_0^{\pi} f(n\pi)\,\mathrm{d}u = \pi f(n\pi) = \mathrm{o}(1)$$

Ainsi, la série $\sum u_n$ vérifie le critère des séries alternées et par conséquent

$$\boxed{\text{La série } \sum \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge.}}$$

Soit $x \geqslant 0$. Pour n entier, on a

$$n\pi \leqslant x < (n+1)\pi \iff n = \left\lfloor \frac{x}{\pi} \right\rfloor$$

Notons $n_x = \left\lfloor \dfrac{x}{\pi} \right\rfloor$. Comme $n_x\pi > x - \pi$, on a $n_x\pi \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$. Puis

$$\begin{aligned}\left|\int_0^x f(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{n_x\pi} f(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t\right| &= \left|\int_{n_x\pi}^x f(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant \int_{n_x\pi}^x f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant (x-n_x\pi)f(n_x\pi) \leqslant \pi f(n_x\pi) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0\end{aligned}$$

et
$$\int_0^{n_x\pi} f(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n_x-1} u_k \xrightarrow[x\to+\infty]{} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

D'après ce qui précède, la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t$ tend vers la même limite pour $x \to +\infty$ et on conclut

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t}$$

Exercice 8 (*)

Vérifier la convergence puis calculer la somme des séries suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n(n+1)}$
2. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{\cos(n)}{2^n}$

Corrigé : 1. On a
$$\forall n \geqslant 1 \qquad \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

Comme $\dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, d'après le lien suite/série téléscopique, on conclut

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n(n+1)} \text{ converge et } \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)} = 1 - \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 1.}$$

2. La série $\displaystyle\sum\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}}}{2}\right)^n$ converge absolument puisque $\displaystyle\sum\left|\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}}}{2}\right|^n = \sum\frac{1}{2^n}$ est une série géométrique convergente. On trouve

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}}}{2}\right)^n = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}}}{2-\mathrm{e}^{\mathrm{i}}} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}}(2-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}})}{(2-\cos(1))^2+\sin^2 1} = \frac{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}}-1}{5-4\cos(1)}$$

Ainsi
$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geqslant 1}\frac{\cos(n)}{2^n} \text{ converge et } \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(n)}{2^n} = \frac{2\cos(1)-1}{5-4\cos(1)}}$$

Exercice 9 (**)

Vérifier la convergence puis calculer la somme des séries suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$
2. $\displaystyle\sum\frac{(-1)^n}{3n+1}$

Corrigé : 1. Soit $n \geqslant 2$. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right) &= \sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{(k-1)(k+1)}{k^2}\right)\\
&= \sum_{k=2}^{n} [\ln(k-1)-\ln(k)] + \sum_{k=2}^{n} [\ln(k+1)-\ln(k)]\\
\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right) &= \ln(n+1)-\ln n-\ln(2) = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\ln(2)
\end{aligned}$$

On conclut $\boxed{\text{La série } \sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) \text{ converge et } \sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = -\ln(2)}$

2. La série $\sum \frac{(-1)^n}{3n+1}$ est alternée et vérifie le critère des séries alternées puisque la suite $\left(\frac{1}{3n+1}\right)_n$ décroît et tend vers zéro. Pour n entier, en observant $\frac{1}{3k+1} = \int_0^1 t^{3k}\,\mathrm{d}t$ pour k entier, il vient par linéarité de l'intégrale

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{3k+1} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_0^1 t^{3k}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} \frac{1-(t^3)^{n+1}}{1+t^3}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3} + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{3(n+1)}}{1+t^3}\,\mathrm{d}t$$

Puis $$\forall n\in\mathbb{N} \qquad 0 \leqslant \int_0^1 \frac{t^{3(n+1)}}{1+t^3}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^{3(n+1)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3n+4}$$

Ainsi $$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3}$$

Après décomposition en éléments simples, on trouve

$$\forall t\in[\,0\,;1\,] \qquad \frac{1}{1+t^3} = \frac{1}{(1+t)(t^2-t+1)} = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{t+1} - \frac{t-2}{t^2-t+1}\right]$$

Puis $$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3} &= \frac{1}{3}\left(\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} - \frac{1}{2}\int_0^1 \left[\frac{2t-1}{t^2-t+1} - \frac{3}{(t-1/2)^2+3/4}\right]\mathrm{d}t\right)\\
&= \frac{1}{3}\left(\ln(2) - \frac{1}{2}\left[\ln\left(|t^2-t+1|\right) - 2\sqrt{3}\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(t-1/2)\right)\right]_0^1\right)
\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\text{La série } \sum \frac{(-1)^n}{3n+1} \text{ converge et } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} = \frac{1}{3}\left(\ln(2)+\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)}$

Exercice 10 (**)

1. Montrer $\forall (x,y)\in(\mathbb{R}_+)^2 \qquad \mathrm{Arctan}\,(x) - \mathrm{Arctan}\,(y) = \mathrm{Arctan}\left(\frac{x-y}{1+xy}\right)$
2. Convergence puis somme de la série $\sum_{n\geqslant 1} \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{1+n+n^2}\right)$

Corrigé : 1. Par trigonométrie, on trouve pour $(a,b)\in\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[^2$ tel que $a-b\in\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$

$$\tan(a-b) = \frac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}$$

Comme $\mathrm{Arctan}\,(\tan(u)) = u$ pour tout $u\in\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$, il s'ensuit

$$\mathrm{Arctan}\,(\tan(a-b)) = a-b = \mathrm{Arctan}\,\left(\frac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}\right)$$

On a également $\tan(\mathrm{Arctan}\,(u)) = u$ pour tout $u \in \mathbb{R}$. Pour $(x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2$, on choisit $a = \mathrm{Arctan}\,(x)$ et $b = \mathrm{Arctan}\,(y)$. Les conditions précédentes sur a et b sont bien vérifiées avec en particulier

$$-\frac{\pi}{2} < -\mathrm{Arctan}\,(y) \leqslant \mathrm{Arctan}\,(x) - \mathrm{Arctan}\,(y) \leqslant \mathrm{Arctan}\,(x) < \frac{\pi}{2}$$

Ainsi, en appliquant les relations précédemment obtenues, on trouve

$$\boxed{\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2 \qquad \mathrm{Arctan}\,(x) - \mathrm{Arctan}\,(y) = \mathrm{Arctan}\,\left(\frac{x-y}{1+xy}\right)}$$

2. On a pour n entier

$$\mathrm{Arctan}\,\left(\frac{1}{1+n+n^2}\right) = \mathrm{Arctan}\,\left(\frac{n+1-n}{1+n(n+1)}\right) = \mathrm{Arctan}\,(n+1) - \mathrm{Arctan}\,n$$

Il s'agit donc d'une série téléscopique et comme $\mathrm{Arctan}\,(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{\pi}{2}$ et $\mathrm{Arctan}\,(1) = \dfrac{\pi}{4}$, on conclut

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geqslant 1} \mathrm{Arctan}\,\left(\frac{1}{1+n+n^2}\right) \text{ converge et } \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{Arctan}\,\left(\frac{1}{1+n+n^2}\right) = \frac{\pi}{4}.}$$

Exercice 11 (**)

Nature des séries de terme général :

1. $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{th}\,(k)}{k\sqrt{k}}$ 2. $\displaystyle(-1)^n \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ 3. $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k\ln(k)^2}$

Corrigé : 1. On a

$$\frac{\mathrm{th}\,(n)}{n\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n\sqrt{n}}$$

Par sommation de relation de comparaison, on a

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{th}\,(k)}{k\sqrt{k}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k\sqrt{k}}$$

Par comparaison série/intégrale, on a pour n entier non nul

$$\int_{n+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t}} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k\sqrt{k}} \leqslant \int_{n}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t}}$$

Ainsi

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{th}\,(k)}{k\sqrt{k}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{\sqrt{n}}$$

Et on conclut

$$\boxed{\text{La série } \sum \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{th}\,(k)}{k\sqrt{k}} \text{ diverge.}}$$

2. Par décroissance de $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$$

d'où l'équivalent
$$\int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Comme $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge, on a par sommation de relation de comparaison
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = \int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = \left[2\sqrt{t}\right]_1^{n+1} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}(\sqrt{n})$$

Par suite
$$(-1)^n \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$$

Ainsi
$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geqslant 1} (-1)^n \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \text{ converge absolument.}}$$

3. Par comparaison série/intégrale, on a pour n entier non nul
$$\int_{n+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)^2} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k\ln(k)^2} \leqslant \int_n^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)^2}$$

Avec le changement de variable $u = \ln t$, on trouve
$$\int_n^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)^2} = \int_{\ln(n)}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^2} = \frac{1}{\ln(n)}$$

Par suite
$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k\ln(k)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\ln(n)}$$

Par convexité, on a
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \frac{1}{\ln(n)} \geqslant \frac{1}{n-1}$$

Par comparaison, on conclut
$$\boxed{\text{La série } \sum \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k\ln(k)^2} \text{ diverge.}}$$

Exercice 12 (**)

Soit $(u_n)_n$ la suite réelle définie par $u_0 > 1$ et $u_{n+1} = \ln(\mathrm{e} - 1 + u_n)$ pour n entier.

Montrer que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$ avec ℓ un réel à préciser puis déterminer la nature de la série $\sum(u_n - \ell)$.

Corrigé : 1. On pose $f(x) = \ln(\mathrm{e} - 1 + x)$ pour $x \geqslant 1$. La fonction f croît et on a
$$\forall x \geqslant 1 \qquad f(x) \leqslant x \iff \mathrm{e} - 1 + x \leqslant \mathrm{e}^x \iff x \geqslant 1$$
après une étude rapide de fonction. Une récurrence immédiate donne $(u_n)_n$ minorée strictement par 1 et on a $(u_n)_n$ monotone et donc décroissante et d'après le théorème limite monotone, la suite $(u_n)_n$ converge. La limite ℓ est point fixe de la fonction f continue sur $[1\,;+\infty[$ et $f(x) = x \iff x = 1$ d'où
$$\boxed{u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1}$$

2. La série $\sum(u_n - 1)$ est à termes strictement positifs d'après l'étude précédente. La fonction f est dérivable et on trouve
$$\frac{u_{n+1} - 1}{u_n - 1} = \frac{f(u_n) - f(1)}{u_n - 1} \xrightarrow[n\to\infty]{} f'(1) = \mathrm{e}^{-1} < 1$$

D'après le critère de d'Alembert, on conclut

$$\boxed{\text{La série } \sum(u_n - 1) \text{ converge.}}$$

Variante : La fonction f est dérivable sur $[\,1\,;+\infty\,[$ avec

$$\forall x \geqslant 1 \qquad f'(x) = \frac{1}{\mathrm{e} - 1 + x}$$

D'après l'inégalité des accroissements finis, il vient

$$\forall (x, y) \in [\,1\,;+\infty\,[^2 \qquad |f(x) - f(y)| \leqslant \mathrm{e}^{-1}\,|x - y|$$

d'où $$\forall n \in \mathbb{N} \qquad |u_{n+1} - 1| \leqslant \mathrm{e}^{-1}\,|u_n - 1|$$

Une récurrence immédiate donne

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad |u_n - 1| \leqslant \mathrm{e}^{-n}\,|u_0 - 1|$$

On conclut que la suite $(u_n)_n$ et la série $\sum (u_n - 1)$ convergent.