Feuille d'exercices n°08

Exercice 1 (***)

Nature de la série de terme général :

1. $\sin(2\pi n!\mathrm{e})$
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n}$
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^n}$

Corrigé : 1. D'après la formule de Taylor avec reste intégral, on a

$$\mathrm{e} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} + \frac{1}{(n+1)!}\int_0^1 (1-t)^{n+1}\mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t$$

d'où

$$2\pi n!\mathrm{e} = 2\pi \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!}}_{\in\mathbb{N}} + \frac{2\pi}{n+1} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$

puis

$$\sin(2\pi n!\mathrm{e}) = \sin\left(\frac{2\pi}{n+1} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2\pi}{n}$$

D'après le critère des équivalents, licite puisqu'un des termes est de signe constant (donc l'autre aussi à partir d'un certain rang), on conclut

$$\boxed{\text{La série } \sum \sin(2\pi n!\mathrm{e}) \text{ diverge.}}$$

2. Soit n entier non nul. On pose $f_n(t) = \dfrac{1}{(1+t^2)^n}$ pour $t \geqslant 0$. On a $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et $0 \leqslant f(t) \leqslant \dfrac{1}{t^{2n}}$. Par comparaison et critère de Riemann, il s'ensuit que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ converge pour tout entier n non nul. La fonction $\varphi : \left]\dfrac{\pi}{4}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[\to \left]1\,;+\infty\right[, u \mapsto \tan u$ est de classe $\mathscr{C}^1$, bijective, strictement croissante. Par théorème, les intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2(n-1)} u \,\mathrm{d}u$ sont de même nature donc convergentes et égales. Par décroissance de cos sur $\left[\dfrac{\pi}{4}\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$, il vient

$$\forall n \geqslant 1 \qquad 0 \leqslant \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2(n-1)} u \,\mathrm{d}u \leqslant \frac{\pi}{4} \times \cos^{2(n-1)}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Par comparaison à une série géométrique convergente, on conclut

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geqslant 1}\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n} \text{ converge.}}$$

Variante : La « masse » de l'intégrale est concentrée autour de 1. Majorons finement l'intégrande en 1 avec $1+t^2 \geqslant 2t$ pour $t \geqslant 1$ (égalité en $t=1$). On obtient

$$\forall n \geqslant 2 \qquad 0 \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n} \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{2^n t^n} = \frac{1}{2^n(n-1)} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{2^n}\right)$$

Par comparaison, on conclut à la convergence de la série.

3. Soit n entier non nul. On pose $f_n(t) = \dfrac{1}{(1+t^3)^n}$ pour $t \geqslant 0$. On a $f_n \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ et $0 \leqslant f_n(t) \leqslant \dfrac{1}{t^{3n}}$. Par comparaison et critère de Riemann, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ converge pour tout entier n non nul. Puis on a

$$\forall n \geqslant 1 \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^n} \geqslant \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^n} \geqslant \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)^n} = \frac{1}{n-1}\left[1-\frac{1}{2^{n-1}}\right] \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

Par comparaison $\boxed{\text{La série } \sum \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^n} \text{ diverge.}}$

Exercice 2 (***)

Montrer
$$\int_0^1 \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{t}} \right\rfloor \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

Corrigé : On pose
$$\forall t > 0 \qquad f(t) = \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{t}} \right\rfloor$$

Le fait que f soit continue par morceaux sur $]\,0\,;1\,]$ n'est pas complètement évident. On a

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \forall t \in \left]\, \frac{1}{(n+1)^2}\,; \frac{1}{n^2} \right] \qquad f(t) = n$$

Soit $[\,a\,;b\,] \subset\,]\,0\,;1\,]$. Déterminons l'intervalle de la forme $\left]\, \dfrac{1}{(n+1)^2}\,; \dfrac{1}{n^2} \right]$ avec n entier non nul contenant a. On a

$$\frac{1}{(n+1)^2} < a \leqslant \frac{1}{n^2} \iff n = \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{a}} \right\rfloor$$

Ainsi
$$\forall t \in [\,a\,;b\,] \qquad f(t) = \sum_{k=1}^{\left\lfloor \frac{1}{\sqrt{a}} \right\rfloor} k \mathbb{1}_{\left] \frac{1}{(k+1)^2}\,;\frac{1}{k^2}\right]}(t)$$

Cette dernière écriture justifie que f est continue par morceaux sur $[\,a\,;b\,]$ et ceci vaut pour tout segment inclus dans $]\,0\,;1\,]$ d'où $f \in \mathscr{C}_{pm}(]\,0\,;1\,],\mathbb{R})$. On a

$$\forall t \in\,]\,0\,;1\,] \qquad 0 \leqslant f(t) \leqslant \frac{1}{\sqrt{t}}$$

Par comparaison et critère de Riemann, la fonction f est intégrable sur $]\,0\,;1\,]$. Soit n entier non nul. On a

$$\int_{\frac{1}{n^2}}^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\frac{1}{n^2}}^1 \sum_{k=1}^{n} k \mathbb{1}_{\left] \frac{1}{(k+1)^2}\,;\frac{1}{k^2}\right]}(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} k \int_{\frac{1}{(k+1)^2}}^{\frac{1}{k^2}} \mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} k \left[\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\right] = \sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{k(k+1)^2}$$

Une décomposition en éléments simples donne

$$\forall k \geqslant 1 \qquad \frac{2k+1}{k(k+1)^2} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)^2}$$

Par suite
$$\int_{\frac{1}{n^2}}^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)^2}\right] = 1 - \frac{1}{n+1} + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k^2}$$

Faisant tendre $n \to +\infty$, on conclut

$$\boxed{\int_0^1 \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{t}} \right\rfloor \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}}$$

Exercice 3 (***)

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de réels strictement positifs tels que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=1-\frac{\alpha}{n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\qquad\text{avec}\qquad \alpha\in\mathbb{R}$$

et soit $(v_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $v_n=\dfrac{1}{n^\beta}$ avec $\beta>0$.

1. Si $\alpha>1$, choisir $\beta\in\,]\,1\,;\alpha\,[$, comparer $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ à $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et en déduire la convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 1}u_n$.
2. Compléter l'étude pour $\alpha<1$ et $\alpha=1$.

Corrigé : 1. On a
$$\frac{v_{n+1}}{v_n}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\beta}=1-\frac{\beta}{n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$

Ainsi
$$\frac{v_{n+1}}{v_n}-\frac{u_{n+1}}{u_n}=\underbrace{\frac{\alpha-\beta}{n}}_{>0}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$

Par suite, il existe N entier non nul tel que

$$\forall n\geqslant \mathrm{N}\qquad 0\leqslant\frac{u_{n+1}}{u_n}\leqslant\frac{v_{n+1}}{v_n}$$

d'où
$$\forall n\geqslant \mathrm{N}\qquad \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}}\leqslant\frac{u_n}{v_n}$$

La suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\geqslant\mathrm{N}}$ décroît et par conséquent

$$\forall n\geqslant \mathrm{N}\qquad u_n\leqslant\frac{u_\mathrm{N}}{v_\mathrm{N}}\times v_n=\mathrm{O}(v_n)$$

Comme $\beta>1$, la série $\sum\limits_{n\geqslant\mathrm{N}}v_n=\sum\limits_{n\geqslant\mathrm{N}}\dfrac{1}{n^\beta}$ converge par critère de Riemann et par comparaison, on obtient

$$\boxed{\text{Si } \alpha>1\text{, la série } \sum_{n\geqslant 1}u_n \text{ converge.}}$$

Variante : Sans passer par la décroissance de la suite des quotients, avec un produit téléscopique, on obtient

$$\forall n\geqslant \mathrm{N}\qquad u_n=u_\mathrm{N}\prod_{k=\mathrm{N}}^{n-1}\frac{u_{k+1}}{u_k}\leqslant u_\mathrm{N}\prod_{k=\mathrm{N}}^{n-1}\frac{v_{k+1}}{v_k}=\frac{u_\mathrm{N}}{v_\mathrm{N}}\times v_n$$

On conclut comme ci-avant.

2. Si $\alpha<1$, on choisit $\beta=1$ et en procédant comme au 1., il existe $\mathrm{N}\geqslant 1$ tel que

$$\forall n\geqslant \mathrm{N}\qquad 0\leqslant\frac{v_{n+1}}{v_n}\leqslant\frac{u_{n+1}}{u_n}$$

puis
$$\forall n\geqslant \mathrm{N}\qquad \frac{u_n}{v_n}\leqslant\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}}$$

La suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\geqslant\mathrm{N}}$ croît et par conséquent

$$\forall n \geqslant \mathrm{N} \qquad v_n \leqslant \frac{v_\mathrm{N}}{u_\mathrm{N}} \times u_n = \mathrm{O}(u_n)$$

La série $\sum\limits_{n\geqslant \mathrm{N}} v_n = \sum\limits_{n\geqslant \mathrm{N}} \frac{1}{n}$ diverge (série harmonique) et par comparaison, on conclut

$$\boxed{\text{Si } \alpha < 1, \text{ la série } \sum_{n\geqslant 1} u_n \text{ diverge.}}$$

3. Considérons $u_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = \frac{1}{n\ln(n)^2}$ pour $n \geqslant 2$. On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1} = 1 - \frac{1}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$

et
$$\begin{aligned}\frac{v_{n+1}}{v_n} &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1}\left(1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}\right)^{-2}\\ &= \left(1-\frac{1}{n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(1-\frac{2}{n\ln(n)}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n\ln(n)}\right)\right) = 1-\frac{1}{n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

Or, la série harmonique $\sum\limits_{n\geqslant 2} u_n$ diverge et la série de Bertrand $\sum\limits_{n\geqslant 2} v_n$ converge. Ainsi

$$\boxed{\text{On ne peut rien dire si } \alpha = 1.}$$

Remarque : Le critère établi dans cet exercice s'intitule *critère de Raabe-Duhamel*. On peut observer qu'il précise le cas litigieux de la limite égale à 1 dans le critère de d'Alembert.

Exercice 4 (**)

Soit $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$. On note $\mathrm{A}_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ pour n entier avec $\mathrm{A}_0 = 0$ pour convention.

1. Montrer
$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \mathrm{A}_n b_n - \sum_{k=1}^{n-1} \mathrm{A}_k (b_{k+1} - b_k)$$

2. Application : pour θ réel, déterminer la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{\sin(n\theta)}{n}$.

Corrigé : 1. Soit n entier. On a

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} \left[\mathrm{A}_k - \mathrm{A}_{k-1}\right] b_k = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{A}_k b_k - \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{A}_k b_{k+1}$$

D'où
$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \mathrm{A}_n b_n - \sum_{k=1}^{n-1} \mathrm{A}_k \left[b_{k+1} - b_k\right]}$$

Remarque : Il s'agit de *la transformation d'Abel* qui est l'homologue discret de l'intégration par parties pour des sommes.

2. Soit θ réel. Si on a $\theta \in \pi\mathbb{Z}$, le résultat est immédiat puisque $\sin(n\theta) = 0$ pour tout n entier. Supposons $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$. Notons $\mathrm{S}_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\sin(k\theta)}{k}$ pour n entier. En lui appliquant la transformation d'Abel, on obtient

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(k\theta)}{k}=\frac{1}{n}\mathrm{T}_n(\theta)-\sum_{k=1}^{n-1}\mathrm{T}_k(\theta)\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k}\right)\qquad\text{avec}\quad \mathrm{T}_k(\theta)=\sum_{k=1}^{n}\sin(k\theta)$$

Puis $\qquad \mathrm{T}_n(\theta)=\mathrm{Im}\left(\sum_{k=1}^{n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta}\right)=\mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\right)\quad\Longrightarrow\quad|\mathrm{T}_n(\theta)|\leqslant\frac{2}{|1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|}$

ce qui prouve que la suite $(\mathrm{T}_n(\theta))_n$ est bornée. Ainsi, on a

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(k\theta)}{k}=\mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)-\sum_{k=1}^{n}\mathrm{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

D'après le critère de Riemann, on conclut que

$$\boxed{\text{Pour } \theta \text{ réel, la série } \sum_{n\geqslant 1}\frac{\sin(n\theta)}{n} \text{ converge.}}$$

Remarque : On peut calculer sa somme en utilisant des résultats issus de la théorie des *séries de Fourier* mais on peut également procéder de manière élémentaire ...

Exercice 5 (****)

Étudier la convergence de la suite $(u_n)_n$ définie par $u_0\in\mathbb{R}$ et $u_{n+1}=\sin(u_n)$ puis déterminer un équivalent simple de u_n lorsque $n\to+\infty$.

Corrigé : On a $(u_n)_{n\geqslant 1}$ à valeurs dans $[-1\,;1]$, intervalle stable par sin. On peut supposer $u_1\geqslant 0$ quitte à poser $v_n=-u_n$ si cette condition n'est pas satisfaite. Alors, la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est à valeurs dans $[0\,;1]$, intervalle stable par sin. Comme $\sin x\leqslant x$ pour $x\geqslant 0$, on en déduit la décroissance de la suite puis sa convergence par limite monotone. Notant $\ell\in[0\,;1]$ sa limite, il vient par continuité de sin que $\ell=\sin(\ell)$ et donc

$$\boxed{u_n\xrightarrow[n\to\infty]{}0}$$

Par récurrence immédiate, si $u_1=0$ alors $(u_n)_{n\geqslant 1}$ stationne à 0 et si $u_1>0$, alors $u_n\geqslant 0$ pour tout n entier non nul. Un développement limité donne

$$u_{n+1}=\sin(u_n)=u_n-\frac{u_n^3}{6}+\mathrm{o}(u_n^3)$$

L'idée est de faire apparaître une expression téléscopique ayant une limite finie non nulle. Puis

$$u_{n+1}-u_n\underset{n\to+\infty}{\sim}-\frac{u_n^3}{6}$$

C'est une expression téléscopique mais de limite nulle. Pour avoir une limite finie non nulle, on pourrait diviser par u_n^3 ce qui donnerait

$$\frac{u_{n+1}}{u_n^3}-\frac{1}{u_n^2}\xrightarrow[n\to\infty]{}-\frac{1}{6}$$

Mais cette dernière expression n'est plus téléscopique. On adapte l'idée en considérant

$$v_n=\frac{1}{u_{n+1}^2}-\frac{1}{u_n^2}=\frac{1}{\sin(u_n)^2}-\frac{1}{u_n^2}=\frac{u_n^2-\sin(u_n)^2}{u_n^2\sin(u_n)^2}=\frac{u_n^2-u_n^2\left(1-\dfrac{u_n^2}{6}+\mathrm{o}(u_n^2)\right)^2}{u_n^4+\mathrm{o}(u_n^4)}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{3}$$

D'après le théorème de Césaro, il vient

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}v_k=\frac{1}{u_n^2}-\frac{1}{u_0^2}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{1}{3}$$

On conclut $$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3}{n}}}$$

Remarque : On a présenté de manière empirique le critère consistant à chercher un α réel tel que la suite $(u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha)_n$ admet une limite finie non nulle.

Exercice 6 (***)

Soit $(u_n)_n$ la suite réelle définie par $\begin{cases} u_{n+1} = \operatorname{Arctan}(u_n) \\ u_0 > 0 \end{cases}$.

Montrer que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ puis déterminer la nature de la série $\sum u_n$.

Corrigé : On a $u_n > 0$ pour tout n entier par récurrence immédiate. La fonction Arctan est croissante et une étude de fonction permet d'établir $\operatorname{Arctan}(x) \leqslant x$ pour $x \geqslant 0$ d'où la décroissance de la suite $(u_n)_n$. D'après le théorème de limite monotone, il s'ensuit que la suite $(u_n)_n$ converge vers une limite $\ell \geqslant 0$. La fonction Arctan étant continue sur $[\,0\,;+\infty\,[$, la limite ℓ est point fixe de Arctan et une étude permet d'établir pour $x \geqslant 0$

$$\operatorname{Arctan}(x) = x \iff x = 0$$

D'où $$\boxed{u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$$

Déterminons α réel tel que $\left(u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha\right)_n$ admette une limite finie non nulle. Soit n entier. Avec le développement usuel $\operatorname{Arctan}(u) = u - \dfrac{u^3}{3} + \mathrm{o}(u^3)$, il vient

$$\begin{aligned} u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha &= (\operatorname{Arctan}(u_n))^\alpha - u_n^\alpha = \left(u_n - \frac{u_n^3}{3} + \mathrm{o}(u_n^3)\right)^\alpha - u_n^\alpha \\ &= u_n^\alpha \left[\left(1 - \frac{u_n^2}{3} + \mathrm{o}(u_n^2)\right)^\alpha - 1\right] \\ &= u_n^\alpha \left(1 - \frac{\alpha u_n^2}{3} + \mathrm{o}(u_n^2) - 1\right) = u_n^{\alpha+2}\left(-\frac{\alpha}{3} + \mathrm{o}(1)\right) \end{aligned}$$

On choisit $\alpha = -2$ et on obtient $$\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{2}{3}$$

D'après le théorème de Césaro, il vient

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{1}{u_{k+1}^2} - \frac{1}{u_k^2}\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{2}{3}$$

d'où $\dfrac{1}{u_n^2} - \dfrac{1}{u_0^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2n}{3}$ et avec $\dfrac{1}{u_0^2} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{u_n^2}\right)$, on trouve

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3}{2n}}$$

D'après le critère des équivalents pour des séries à termes positifs, on conclut

$$\boxed{\text{La série } \textstyle\sum u_n \text{ diverge.}}$$

Variante : On peut aussi envisager l'étude de la série $\sum \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$. Pour n entier, on a

$$\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln\left(\frac{\operatorname{Arctan}(u_n)}{u_n}\right) = \ln\left(1 - \frac{u_n^2}{3} + \mathrm{o}(u_n^2)\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{u_n^2}{3} < 0$$

D'après le critère des équivalents licite pour des séries à termes négatifs, les séries $\sum \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ et $\sum u_n^2$ sont de même nature. D'après le lien suite/série téléscopique, comme $\ln u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$, la série $\sum \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ diverge et par conséquent la série $\sum u_n^2$ diverge. Enfin, comme $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, on dispose d'un seuil N entier tel que $u_n \leqslant 1$ pour $n \geqslant \mathrm{N}$ et il vient

$$\forall n \geqslant \mathrm{N} \qquad 0 \leqslant u_n^2 \leqslant u_n$$

Par comparaison, on retrouve la divergence de $\sum u_n$. Cette technique répond à la question sans fournir d'équivalent du terme général.