Évaluations des performances des S.L.C.I : Stabilité

TD

v1.1 Ⓟ

Institutuion Sainte Marie – 2 Rue de l'Abbaye - 92160 Antony

Table des matières

1 Caractérisation d'une fonction de transfert

La fonction de transfert en boucle ouverte d'un asservissement à retour unitaire est de la forme :

$$H_{BO}(p) = \frac{K}{p^n\,(1+Tp)^2}$$

avec $K > 0$.

Question 1 Tracer le schéma bloc de l'asservissement, l'entrée est une consigne de vitesse $\Omega_c(p)$ et la sortie $\Omega_s(p)$.

Question 2 Déterminer K, n et T pour que le système en boucle fermée réponde aux exigences suivantes :

- le signal de consigne étant une rampe unitaire de 1 rad/s, l'erreur de traînage $\epsilon_t = \frac{1}{50}$ rad/s.
- la marge de gain M_G est de 10 dB.

Question 3 Tracer les diagrammes de Bode asymptotiques et réels de $H_{BO}(p)$, préciser les marges de phase et de gain.

Question 4 Quelle est alors l'erreur indicielle ?

Question 5 Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée.

2 Pôles de la fonction de transfert en boucle fermée

On donne ci-dessous les pôles des FTBF de plusieurs systèmes.

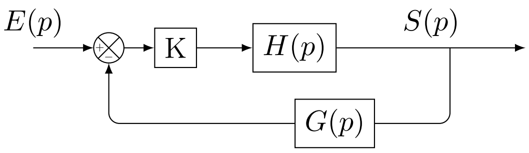
- système 1 : $-1, -2$;
- système 2 : $-3, -2, 0$;
- système 3 : $-2+j, -2-j, 2j, -2j$
- système 4 : $-2+3j, -2-3j, -2$;
- système 5 : $-j, j, -1, 1$;
- système 6 : $-1, 1$;
- système 7 : $-100+j, -100-j, -1$;
- système 8 : $2, -1, -3$;
- système 9 : $-6, -4, 7$.

Question 1 Pour chaque cas, déterminer si le système est stable ou instable. Pour les situations stables, indiquer si la réponse à un échelon présentera des oscillations, et si ces oscillations seront visibles.

- système 1 : stable sans oscillations
- système 2 : instable
- système 3 : instable
- système 4 : stable avec oscillations visibles
- système 5 : instable
- système 6 : instable
- système 7 : stable avec oscillations non visibles car le pôle réel est dominant
- système 8 : instable
- système 9 : instable

3 Tracé de Bode et gain K

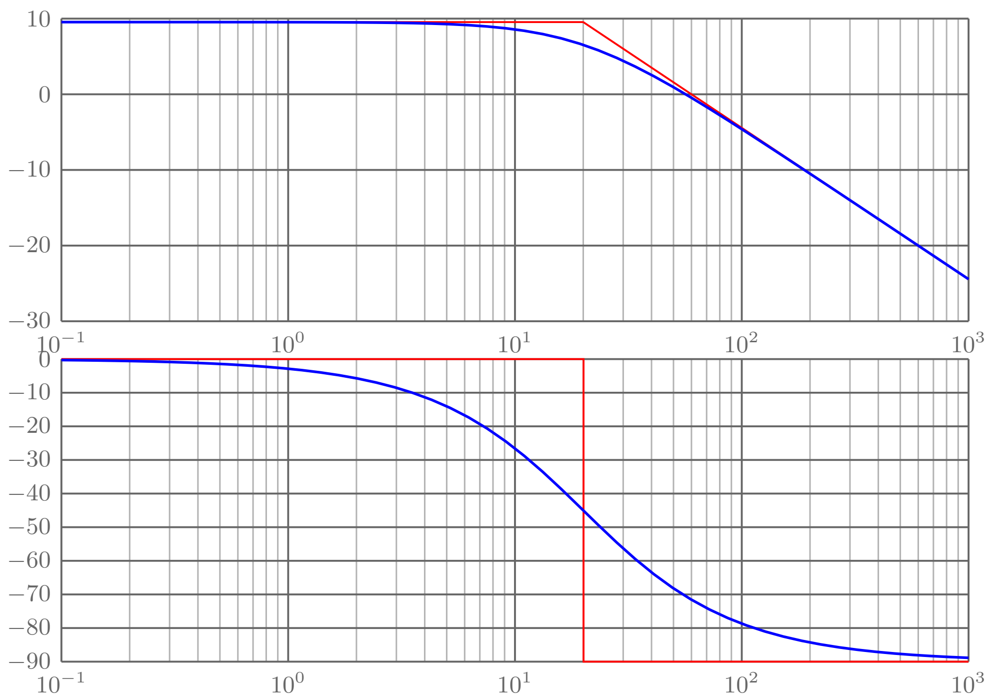
On considère le système asservi dont le schéma-bloc est donné ci-dessous.



Question 1 Tracer le diagramme de Bode de la FTBO pour $K = 1$ et analyser, à l'aide du critère graphique du revers, l'influence la valeur de K sur la stabilité théorique du système pour les différents cas suivants :

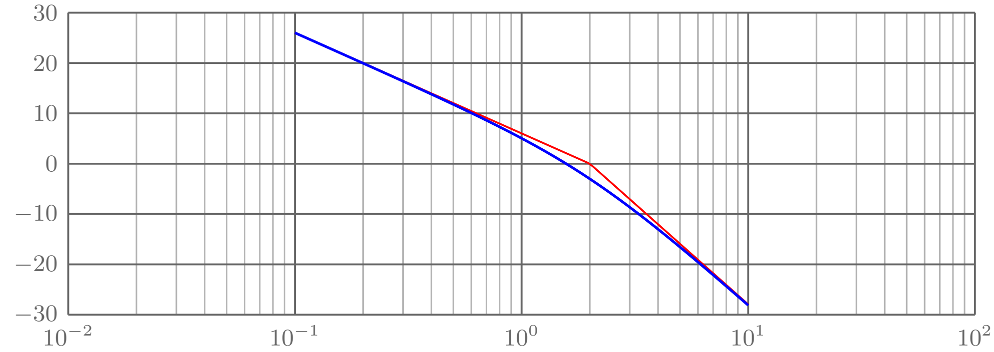
- cas 1 : $F(s) = \dfrac{3}{2+0,1p}$ et $G(p) = 3$;
- cas 2 : $F(p) = \dfrac{1}{p(1+0,5p)}$ et $G(p) = 2$;
- cas 3 : $F(p) = \dfrac{2}{p\,(1+2p+0,3p^2)}$ et $G(p) = 4$;

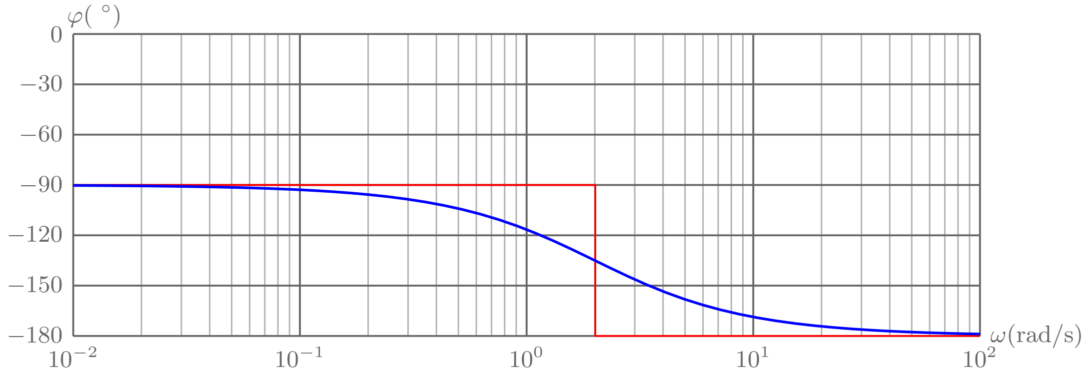
Cas 1 : $H_{BO}(p) = \dfrac{3}{1+0,05p}$



Conclusion : stable qu'importe la valeur de K. (*logique pour un premier ordre*)

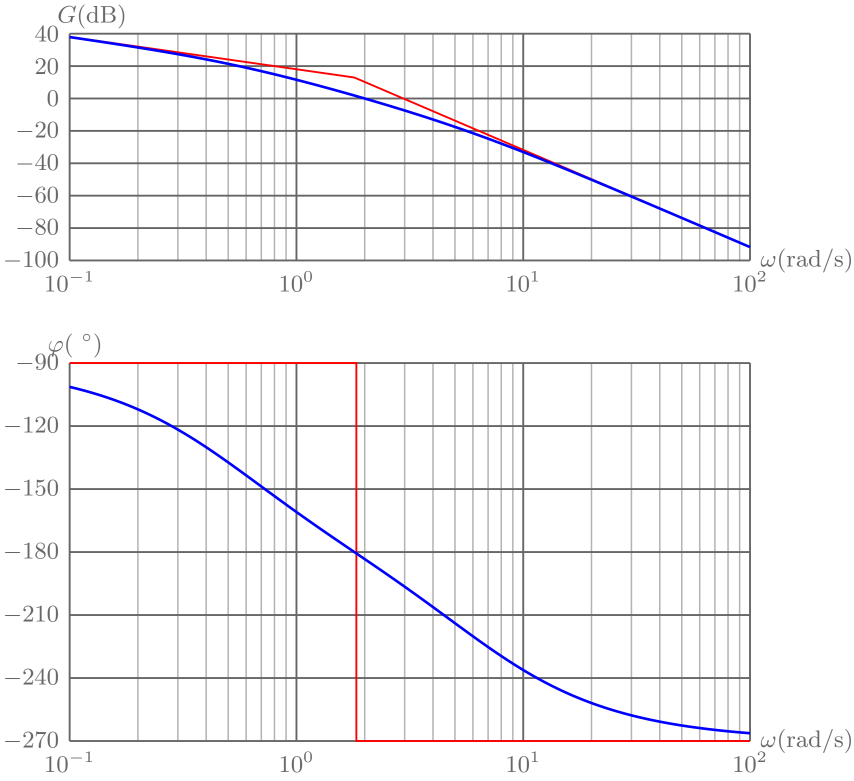
Cas 2 : $H_{BO}(p) = \dfrac{2}{p(1+0,5p)}$





Conclusion : stable qu'importe la valeur de K. (*logique pour un second ordre*)

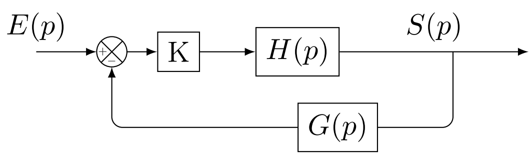
Cas 3 : $H_{BO}(p) = \dfrac{8}{p(1+2p+0,3p^2)}$ soit $\omega_0 \simeq 1,8$ rad/s et $\xi \simeq 1,8$



Conclusion : ici le système est instable. Il faut abaisser la courbe de gain. Et donc avoir un K plus faible.

4 Réglage des marges de stabilité - 1 (par le calcul)

On considère le système asservi à retour unitaire ($G(p) = 1$) dont le schéma-bloc est donné ci-dessous.



$$\text{Avec } H(p) = \frac{1}{p(1+0,1p)(1+0,05p)}$$

Question 1 Déterminer la valeur à donner à K pour obtenir une marge de phase de 45°.

Pour obtenir une marge de phase désirée en réglant le gain statique K_{BO} d'une $FTBO$:

- 1ère étape : on détermine la pulsation de coupure à 0 dB : $\omega_{0\text{ dB}}$ de la FTBOà obtenir pour avoir la marge de phase désirée. La solution de l'équation ainsi posée ne dépend pas du gain statique K_{BO} de la FTBO, on a donc une équation à une inconnue ($\omega_{0\text{ dB}}$).
- 2ème étape : on détermine la valeur du gain statique K_{BO} de la FTBOqui permet de d'assurer cette pulsation $\omega_{0\text{ dB}}$ déterminée à l'étape précédente. On a donc une équation à une inconnue (K_{BO}).

Remarque

si possible, on utilise le solveur de sa calculatrice pour trouver rapidement les solutions de ces équations. Si besoin, on détaille tout ou partie du calcul de l'argument ou de la phase de la fonction de transfert en boucle ouverte complexe.

Dans tous les cas, on contrôle graphiquement le résultat si on accès au diagramme de Bode de la FTBO

On a : $H_{BO}(p) = \frac{K}{s(1+0{,}1s)(1+0{,}05s)} \quad \Rightarrow H_{BO}(j\omega) = \frac{K}{j\omega(1+0{,}1j\omega)(1+0{,}05j\omega)}$

On cherche K tel que : $M_\varphi = 45° = 180° + \arg\left(H_{BO}\left(j\omega_{0\text{ dB}}\right)\right)$

- 1 ère étape :
  On cherche $\omega_{0\text{ dB}-BO}$ tel que : $\arg\left(H_{BO}\left(j\omega_{0\text{ dB}}\right)\right) = -135° \Rightarrow \omega_{0\text{ dB}} = \underline{5,62\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}}$
  Si besoin : $\arg\left(H_{\text{BO}}\ \left(j\omega_{0\text{ dB}}\ \right)\right) = -\left(90° + \arctan\left(0,1\omega_{0\ dB}\right) + \arctan\left(0,05\omega_{0\ dB}\right)\right)$
- $2^{\text{ème}}$ étape :
  On cherche K tel que $G_{dB} = 20\log\left|H_{BO}\left(j\omega_{0\text{ dB}-BO}\right)\right| = 0\text{ dB} \Rightarrow \left|H_{BO}\left(j\omega_{0\text{ dB}-BO}\right)\right| = 1 \Rightarrow K = 6,7$
  Si besoin : $\left|H_{BO}\left(j\omega_{0dB}\right)\right| = \frac{K}{5{,}62\sqrt{1+(0{,}1\times 5{,}62)^2}\sqrt{1+(0{,}05\times 5{,}62)^2}}$

Question 2 Déterminer la valeur à donner à K pour obtenir une marge de gain de 10 dB.

Pour obtenir une marge de gain désirée en réglant le gain statique K_{BO} d'une $FTBO$:

- $1^{\text{ère}}$ étape : on détermine, si elle n'est pas encore connue, la pulsation $\omega_{-180°}$. La solution de l'équation ainsi posée ne dépend pas du gain statique K_{BO} de la $FTBO$, on a donc une équation à une inconnue ($\omega_{-180°}$).
- $2^{\text{ème}}$ étape : on détermine la valeur du gain statique K_{BO} de la $FTBO$ qui permet de d'assurer la marge de gain imposée à cette pulsation $\omega_{-180°}$ déterminée à l'étape précédente. On a donc une équation à une inconnue (K_{BO}).

Remarque

si possible, on utilise le solveur de sa calculatrice pour trouver rapidement les solutions de ces équations. Si besoin, on détaille tout ou partie du calcul de l'argument ou de la phase de la fonction de transfert en boucle ouverte complexe.

Dans tous les cas, on contrôle graphiquement le résultat si on accès au diagramme de Bode de la FTBO

On cherche K tel que : $M_g = -20\log\left|H_{BO}\left(j\omega_{-180°}\right)\right| = 10\text{ dB}$

- $1^{\text{ère}}$ étape :
  On cherche $\omega_{-180°}$ tel que : $\arg\left(H_{BO}\left(j\omega_{-180°}\right)\right) = -180° \Rightarrow \omega_{-180°} = \underline{14,14\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}}$
  Si besoin $\arg\left(H_{BO}\left(j\omega_{-180°}\right)\right) = -\left(90° + \arctan\left(0,1\omega_{-180°}\right) + \arctan\left(0,05\omega_{-180°}\right)\right)$
- $2^{\text{ème}}$ étape :
  On cherche donc K tel que : $M_g = -20\log\left|H_{BO}\left(j\omega_{-180°}\right)\right| = 10\text{ dB} \Rightarrow K = 9,5$
  Si besoin : $\left|H_{BO}\left(j\omega_{-180°}\right)\right| = \frac{K}{14{,}1\sqrt{1+(0{,}1\times 14{,}1)^2}\sqrt{1+(0{,}05\times 14{,}1)^2}}$

5 Réglage des marges de stabilité - 2 (graphiquement)

La fonction de transfert en boucle ouverte d'un système asservi est :

$$H_{BO}(p) = \frac{10K}{1 + 3 \times 10^{-2} p + 3 \times 10^{-4} p^2 + 10^{-6} p^3}$$

Étude de la stabilité

Question 1 Tracez, pour la valeur particulière $K = 10$, le diagramme de Bode asymptotique puis réel.

On cherche d'abord les racines du dénominateur afin de vérifier si celui-ci peut se factoriser à l'aide pôles réels. Ici c'est le cas, car $p = -100$ est racine triple du dénominateur de la FTBO.

On a donc $FTBO(p) = \frac{100}{\left(1+\frac{1}{100}p\right)^3}$

Pour le tracé asymptotique, on peut considérer que c'est la superposition de trois systèmes du premier ordre qui ont la même pulsation de cassure $\omega_{\text{cassure}} = 100 \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

Pour le tracé réel, on peut :

- placer les points particuliers connus pour le modèle usuel du 1er ordre : $G_{dB}\left(\omega_{\text{cassure}}\right)$ à -3dB sous la cassure pour chaque 1er ordre, donc -9 dB dans notre cas et $\varphi\left(\omega_{\text{cassure}}\right) = -45°$ pour chaque 1er ordre, donc $-135°$ dans notre cas.
- déterminer quelques valeurs particulières du gain en dB et du déphasage en ° :

$$G_{dB}(\omega) = 20 \log |H_{BO}(j\omega)|$$

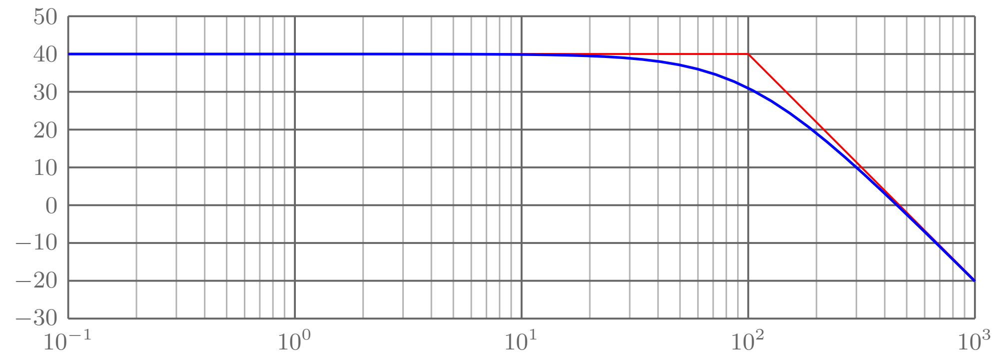
$$\Downarrow$$

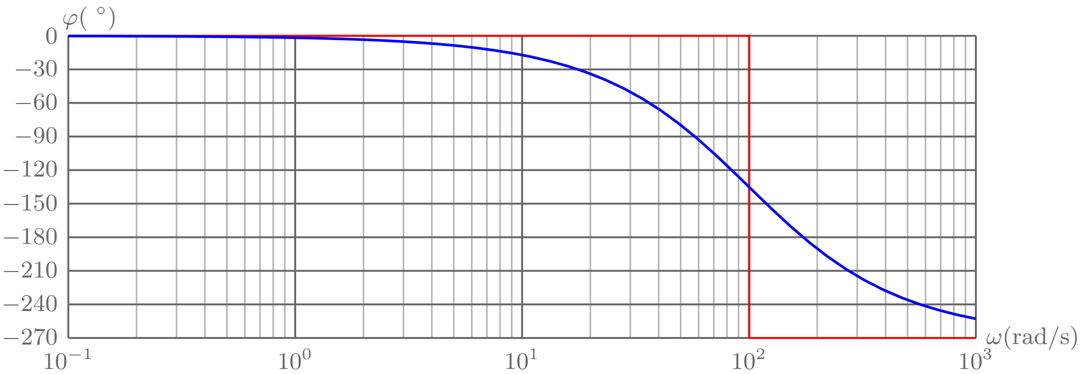
$$\begin{cases} G_{dB}\left(\omega = 80 \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}\right) = 33,5 \text{ dB} \\ G_{dB}\left(\omega = 200 \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}\right) = 19 \text{ dB} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi^\circ\left(\omega = 10 \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}\right) = -17° \\ \varphi^\circ\left(\omega = 1000 \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}\right) = -252° \end{cases}$$

$$\text{si besoin } |H_{BO}(j\omega)| = \frac{100}{\left(\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{100}\right)^2}\right)^3}$$

$$\text{et} \quad \arg\left(H_{BO}(j\omega)\right) = -3 \arctan\left(\frac{\omega}{100}\right)$$





Question 2 Conclure, à l'aide du critère graphique du revers, quant à la stabilité du système asservi. La FTBO ne possède pas de pôles à partie réelle strictement positive, ce qui la place dans les conditions d'application du critère du revers.

Pour $K = 10$, le critère graphique du revers nous indique que le système est instable car pour $\omega_{0\text{ dB}-BO}$, on a $\varphi(\omega_{0dB} - BO) < -180°$.

Question 3 Faire apparaître les marges de stabilité sur le diagramme puis déterminer analytiquement leurs valeurs précises.

Rappel

- la pulsation où se lit la marge de gain est toujours supérieure à la pulsation où se lit la marge de phase. Conséquence, il faut toujours déterminer la marge de phase en premier.
- une marge qui ne peut pas être déterminée est qualifiée comme « non définie ».

On a $M_\varphi = 180° + \arg\left(FTBO\left(j\omega_{0dB}\right)\right)$.

On cherche ω_{0dB} tel que :

$$20\log\left|\text{FTBO}\left(j\omega_{0dB}\right)\right| = 0\text{ dB} \Rightarrow \left|FTBO\left(j\omega_{0dB}\right)\right| = 1 \Rightarrow \omega_{0dB} = 453\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

En en déduit que : $M_\varphi = 180° + \arg\left(FTBO\left(j\omega_{0dB}\right)\right) = \underline{-52,7°}$

On a $M_G = -20\log\left|FTBO\left(j\omega_{-180°}\right)\right|$.

On cherche $\omega_{-180°}$ telle que :

$$\arg\left(FTBO\left(j\omega_{-180^\circ}\right)\right) = -180^\circ \Rightarrow \omega_{-180^\circ} = \underline{173,2\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}}$$

La pulsation où se lit la marge de gain devant toujours être supérieure à la pulsation où se lit la marge de phase, on en déduit que la marge de gain est non définie. En effet, $\forall\omega > \omega_{0\ \mathrm{dB}}$ on a $\varphi(\omega) < -180^\circ$.

Question 4 Déterminer graphiquement puis analytiquement la valeur du gain $K = K_1$ pour que le système en boucle fermée soit à la limite de la stabilité. Se placer à la limite de la stabilité revient à imposer que $\omega_{0dB} = \omega_{-180^\circ}$. Cela correspond à des marges de gain et de phase nulles : $M_G = 0$ dB et $M_\varphi = 0^\circ$.

Graphiquement :

En multipliant par une constante k la $FTBO$, on translate la courbe de gain verticalement d'une valeur ΔdB sans modifier la courbe de phase.

En effet :

$$20\log|k \times FTBO(j\omega)| = \underbrace{20\log k}_{\substack{\Delta\text{ dB : valeur en dB}\\ \text{ajouter } (>0)\\ \text{ou retrancher } (<0)\\ \forall\omega}} + 20\log|FTBO(j\omega)|$$

et

$$\arg(k \times FTBO(j\omega)) = \arg(FTBO(j\omega))$$

On cherche le coefficient k (avec $K_1 = kK$) permettant de translater vers le bas la courbe de gain de 22 dB.

Cela revient à cherche k tel que :

$20\log(k) = \Delta\mathrm{dB} = -22$ dB

Soit :

$$k = 10^{-\frac{22}{20}} = 0,08$$
$$\Rightarrow K_1 = 0,08 \times 10 = 0,8$$

Analytiquement :

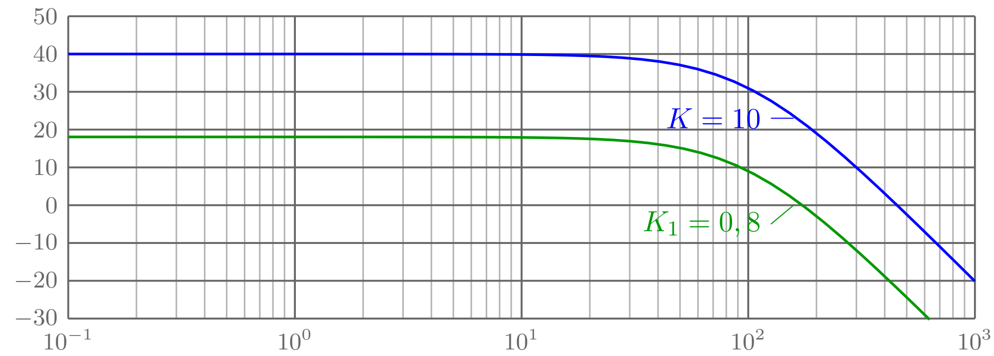
$\rightarrow$ 1$^{\text{ère étape}}$

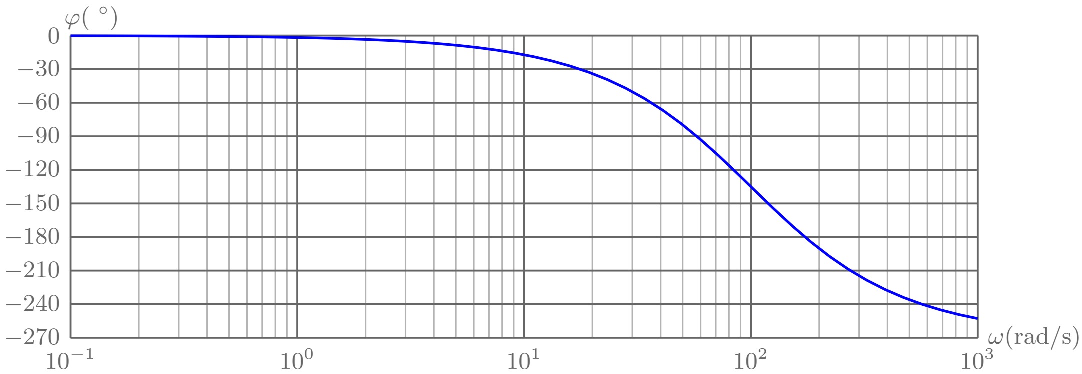
On cherche ω_{-180° tel que $\arg\left(FTBO\left(j\omega_{-180^\circ}\right)\right) = -180^\circ \Rightarrow \omega_{-180^\circ} = 173,2\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$

$\rightarrow$ 2$^{\text{ème étape :}}$

On cherche K_1 tel que $20\log\left|FTBO\left(j\omega_{-180^\circ}\right)\right| = 0$ dB $\Rightarrow \left|FTBO\left(j\omega_{-180^\circ}\right)\right| = 1 \Rightarrow K_1 = 0,8$

Question 5 Tracer le diagramme de Bode, asymptotique et réel, pour cette valeur particulière de K_1. Faire apparaître les marges de stabilité de ce diagramme.





Les marges de stabilité sont nulles puisque l'on est à la limite de la stabilité. (Voir tracé précédent).

Réglage des marges de stabilité

Question 6 Déterminer graphiquement puis analytiquement la valeur du gain statique $K = K_2$ pour que la marge de gain soit de 12 dB. **Graphiquement :**

On cherche le coefficient k (avec $K_2 = kK$) permettant de translater vers le bas la courbe de gain de 34 dB.

Cela revient à cherche k tel que :

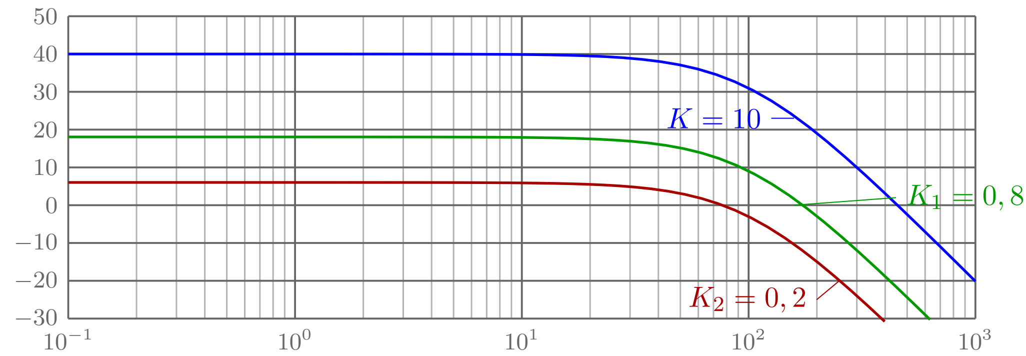
$20\log(k) = \Delta\text{dB} = -34$ dB

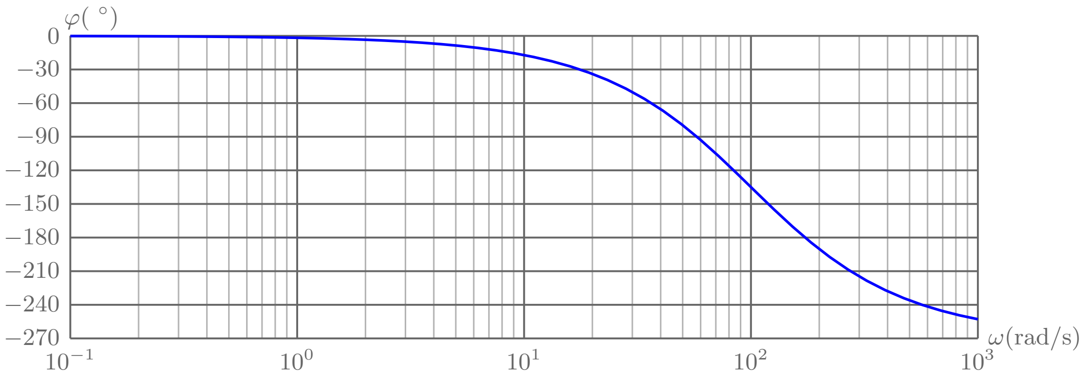
Soit :

$$k = 10^{-\frac{34}{20}} = 0,02 \Rightarrow K_2 = 0,02 \times 10 = 0,2$$

Analytiquement : $\rightarrow$ 2ème étape :

On cherche donc K_2 tel que : $M_G = -20\log|FTBO(j\omega_{-180^\circ})| = 12$ dB $\Rightarrow |FTBO(j\omega_{-180^\circ})| = 10^{-\frac{12}{20}} \Rightarrow K_2 = 0,2$.





Question 7 Déterminer graphiquement puis analytiquement la valeur du gain statique $K = K_3$ pour que la marge de phase soit de 45°.

Graphiquement :

On cherche le coefficient k (avec $K_3 = kK$) permettant de translater vers le bas la courbe de gain de 31dB .

Cela revient à cherche k tel que :

$$20\log(k) = \Delta\text{dB} = -31 \text{ dB}$$

Soit :

$$k = 10^{-\frac{31}{20}} = 0,03$$
$$\Rightarrow K_3 = 0,03 \times 10 = 0,3$$

Analytiquement :

Rappel

Pour obtenir une marge de phase désirée en réglant le gain statique K_{BO} d'une $FTBO$:

- $1^{\text{ère}}$ étape : on détermine la pulsation $\omega_{0\ \text{dB}-BO}$ à obtenir pour avoir la marge de phase désirée. La solution de l'équation ainsi posée ne dépend pas du gain statique K_{BO} de la FTBO, on a donc une équation à une inconnue ($\omega_{0dB} - BO$)
- $2^{\text{ème}}$ étape : on détermine la valeur du gain statique K_{BO} de la $FTBO$ qui permet de d'assurer cette pulsation $\omega_{0\ \text{dB}-BO}$ déterminée à l'étape précédente. On a donc une équation à une

inconnue (K_{BO})

→ $1^{\text{ère}}$ étape :

On souhaite que $M_\varphi = 180° + \arg\left(FTBO\left(j\omega_{0dB-BO}\right)\right) = 45°$. On cherche ω_{0dB} tel que :

$\arg\left(FTBO\left(j\omega_{0dB-BO}\right)\right) = -135° \Rightarrow \omega_{0dB} = 100\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$

Si besoin : $\arg\left(FTBO\left(j\omega_{0dB}\right)\right) = -3\arctan\left(\frac{\omega_{0dB}}{100}\right)$

Remarque

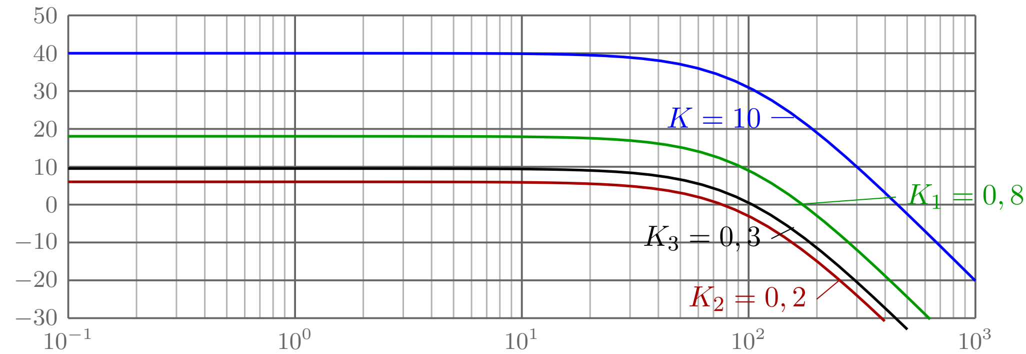
Cette valeur était en réalité déjà connue à partir des résultats concernant le modèle usuel d'ordre 1. En effet, on sait que pour un modèle usuel d'ordre 1, la phase en ω_{cassure} (ici 100rad/s) est de $-45°$. Or ici, notre $FTBO$ est le produit de trois premiers ordres de même pulsation de cassure 100rad/s.

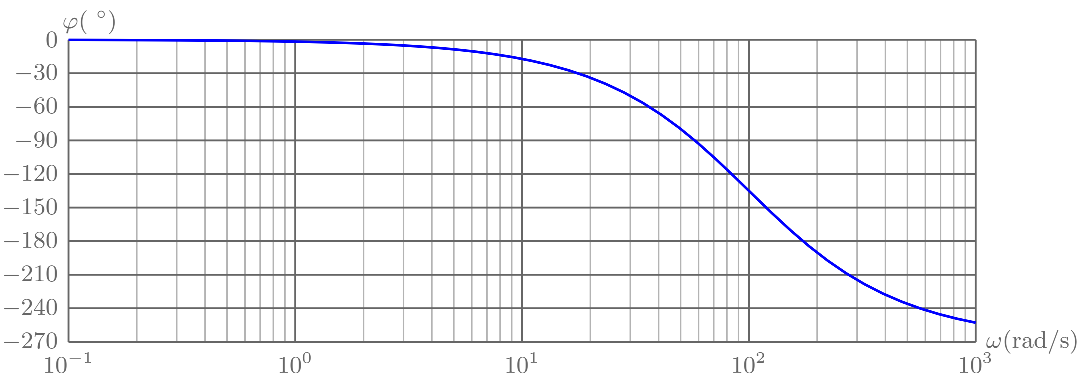
→ $2^{\text{ème}}$ étape :

On cherche K_3 tel que :

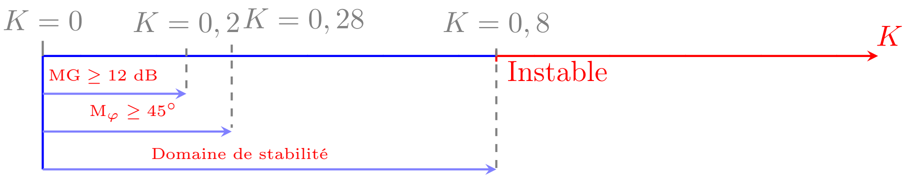
$20\log\left|FTBO\left(j\omega_{0dB}\right)\right| = 0 \text{ dB} \Rightarrow \left|FTBO\left(j\omega_{0dB}\right)\right| = 1 \Rightarrow K_3 = 0,28$

Si besoin : $\left|FTBO\left(j\omega_{0dB}\right)\right| = \frac{10K_3}{\sqrt{1+\frac{\omega_{0dB^2}^2}{100^2}}}$





Question 8 Conclure sur l'influence de K sur les marges de stabilité. On voit bien l'influence de la valeur du gain statique $K_{BO} = 10K_i$ sur la performance de stabilité. Plus K_{BO} est grand et plus les marges de stabilités sont faibles jusqu'à atteindre la limite de la stabilité.



Vis-à-vis des marges de stabilité couramment utilisées ($M_G = 12$ dB et $M_\varphi = 45°$), c'est le réglage de la marge de gain qui est la plus contraignante.