MP

Évaluations des performances des S.L.C.I : Précision, rapidité

Cours

v1.1

Institutuion Sainte Marie – 2 Rue de l'Abbaye - 92160 Antony

Table des matières

Introduction

Caractéristiques attendues d'un système asservi

Il y a 3 critères de performances à vérifier et à obtenir pour l'utilisation d'un SLCI. Ils sont donnés ci-après par ordre décroissant d'importance

Définition *Critères de performance*

Le comportement d'un système asservi est évalué suivant différents critères de performance :
- *Stabilité* : la réponse du système converge-t-elle pour une entrée constante ? Certains systèmes peuvent être instables, dans ce cas, leurs réponses divergent ou oscillent sans jamais se stabiliser ;
- *Précision* : le système asservi atteint-il la valeur de consigne en l'absence de perturbation(s) ? le système asservi atteint-il la valeur de consigne en présence de perturbation(s) ?
- *Rapidité* : combien de temps faut-il au système pour se stabiliser ?

La précision est une caractéristique prépondérante d'un système asservi *en poursuite* ou d'une *régulation* (nous reviendrons sur ces notions plus bas). La précision est évaluée aussi bien vis-à-vis de l'entrée de consigne que vis-à-vis des perturbations.

Remarque

Évidemment la notion de précision va être étroitement lié à la notion de stabilité. Un système précis n'a de sens que pour un système atteignant un régime permanent, et donc stable.

Attention à l'implication et non l'équivalence...

1 Précision : définitions et propriétés

Définition *Précision*

Un système doit être précis relativement à l'entrée en étant insensible aux perturbations. Les perturbations ne doivent pas dégrader la précision de la réponse finale.

1.1 Notion d'écart et d'erreur

Il existe deux notions qui se complètent et qui peuvent également se confondre :
- l'erreur « μ » : qui est la différence entre l'entrée (la grandeur de consigne) et la sortie (la grandeur réelle). C'est celle qui est le plus simple à appréhender physiquement.

$$\mu(t) = e(t) - s(t)$$

- l'écart « ε » : qui est la grandeur en sortie du comparateur. Physiquement on peut le voir comme la différence entre la grandeur de commande envoyée au système et la grandeur en sortie de

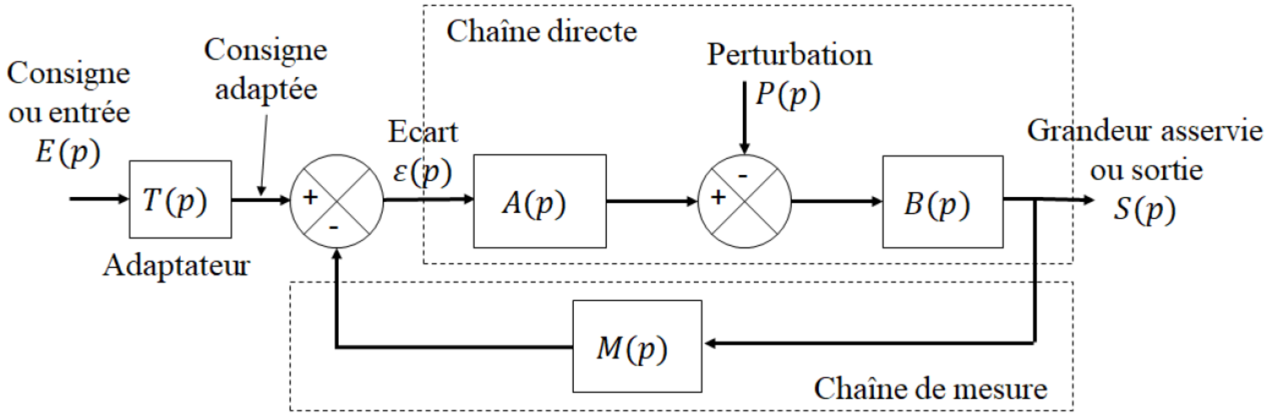


FIGURE 1 – Schéma fonctionnel d'un système asservi

capteur. Cette grandeur dépend du système utilisé et peut être généralement un signal numérique ou électrique.

$$\varepsilon(t) = y_{adapt}(t) - y_{capt}(t)$$

On qualifie un système de précis, si la grandeur de sortie correspond à la consigne d'entrée. Nous allons considérer les deux schéma-blocs suivants :

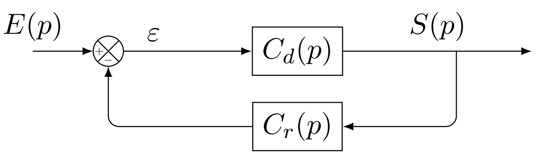


FIGURE 2 – Schéma Bloc à retour non unitaire.

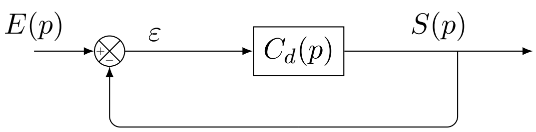


FIGURE 3 – Schéma Bloc à retour unitaire.

Propriété

Considérons un système asservi à retour unitaire, (*c.f.* FIGURE 3).

Lorsque le système est à retour unitaire, l'erreur est égale à l'écart

$$\text{Système asservi à retour unitaire} \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon(p) = \mu(p)$$

Définition *Écart statique*

On appelle *écart statique* [a], la limite de l'écart pour un temps infini, lorsqu'elle existe :

$$\varepsilon_s = \lim_{t\to+\infty} \varepsilon(t) = \lim_{t\to+\infty} y_{\text{cons.}}(t) - y(t)$$

a. l'erreur $\mu(p)$ est égale à l'écart $\varepsilon(p)$, uniquement si celui-ci est calculé sur le schéma à retour unitaire

Remarque

Il faut distinguer :

- L'erreur statique (*resp.* écart statique) : c'est l'erreur en régime permanent entre la sortie et la loi d'entrée. Pour déterminer cette erreur on soumet le système à des entrées classiques dites, canoniques :
  - Échelon, on parle alors d'erreur indicielle.
  - Rampe, on parle alors d'*erreur de traînage* ou erreur de poursuite.
  - Accélération, on parle alors d'erreur en accélération (très rare en CPGE).
- L'erreur dynamique (*resp.* écart dynamique) : C'est l'écart instantané entre la sortie et l'entrée lors de la phase transitoire suivant l'application de l'entrée ou après une perturbation (hors programme).

Remarque

Cette distinction[a] entre *écart* et *erreur* peut être source d'erreur. Il est important de se rappeler que :

écart = sortie du comparateur

erreur = consigne - sortie

a. Toujours, lors d'un retour unitaire (et sans adaptation) les deux se confondent.

1.2 Lien avec la FTBO

TODO

Reprenons les deux schémas blocs des FIGURES 2 et 3 et calculons l'expression de l'écart $\varepsilon(p)$ en fonction de l'entrée $E(p)$.

Propriété

Dans les deux cas on obtient :

$$\varepsilon(p) = \frac{1}{1 + FTBO(p)} E(p)$$

À retenir

L'erreur dépend de la **FTBO** et de la **nature de l'entrée** (échelon, rampe, impulsion etc...).

Dans la suite, nous nous limiterons aux systèmes à retour unitaire, l'étude étant identique pour les systèmes à retour non unitaire.

Remarque

Attention à la présence d'un bloc d'adaptation qui est souvent source d'erreur entre écart et erreur.

2 Précision d'un système non perturbé

Dans cette partie nous nous attaquons à la première partie de l'évaluation du critère de performance "*rapidité*" : le cas **non perturbé.** On parle alors de *système asservi* ou parfois de *fonctionnement en poursuite*.

Définition *Fonctionnement en poursuite*

Dans les systèmes asservis fonctionnant en poursuite (ou *suiveurs*), la consigne d'entrée varie en permanence. L'objectif de ce système est d'ajuster en permanence le signal de sortie au signal d'entrée. (*ex : suivi de consigne à l'aide d'un potentiomètre, télé-chirurgie etc...*)

Nous nous placerons dans le cas général pour lequel la FTBO peut être mise sous la forme :

$$FTBO(p) = \frac{K \cdot N(p)}{p^{\alpha} \cdot D(p)}$$

avec comme vu dans le chapitre précédent :

- $K > 0$: le gain du système.
- $N(p)$: le numérateur polynôme de degré n avec $N(0) = 1$.
- $D(p)$: le dénominateur polynôme de degré m avec $D(0) = 1$.
- $\alpha \geq 0$: la classe du système.

Rappel

Pour un système physique le degré du dénominateur $m+\alpha > n$ pour respecter le principe de causalité.

Rappel

Le théorème de la valeur finale permet d'écrire :

$$\lim_{t\to\infty} (\varepsilon(t)) = \lim_{p\to 0} (p \cdot \varepsilon(p))$$

Remarque

Ce théorème ne peut-être utilisé que si la sortie converge, par définition le système doit être stable. Nous supposerons donc que cela est le cas.

TODO

Pour la forme d'une FTBO comme écrit précédemment, calculer l'expression littérale de écart statique.

Ici on peut donc écrire pour l'écart :

$$\varepsilon(p) = \frac{1}{1+FTBO(p)}E(p) = \frac{1}{1+\frac{K\cdot N(p)}{p^\alpha\cdot D(p)}}E(p)$$

$$\varepsilon(p) = \frac{p^\alpha\cdot D(p)}{p^\alpha\cdot D(p)+K\cdot N(p)}E(p)$$

d'où pour l'erreur statique

$$\varepsilon_s = \lim_{p\to 0}(p\cdot\varepsilon(p)) = \lim_{p\to 0}\left(p\frac{p^\alpha\cdot D(p)}{p^\alpha\cdot D(p)+K\cdot N(p)}E(p)\right)$$

Finalement en se rappelant que : $N(0)=1$ et $D(0)=1$:

$$\varepsilon_s = \lim_{p\to 0}\left(\frac{p^{\alpha+1}}{p^\alpha+K}E(p)\right)$$

À retenir

L'erreur statique dépend de la nature de l'entrée $E(p)$ et de la classe α de la fonction de transfert en boucle ouverte et du gain K de la FTBO.

2.1 Erreur indicielle - entrée de type échelon

On va considérer l'erreur indicielle ε_i, qui est l'erreur statique (donc en régime établi) relative à une entrée en échelon.

Rappel

Un échelon $e(t) = E_0\cdot\mathcal{H}(t)$ avec $\mathcal{H}(t)$ la fonction de Heaviside s'écrit dans le domaine de Laplace

$$e(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} E(p) = \frac{E_0}{p}$$

TODO

Pour une entrée en échelon, écrire l'expression littérale de l'écart statique en fonction du gain K et de la classe α.

Le système étant stable (par hypothèse) on peut écrire le théorème de la valeur finale :

$$\varepsilon_i = \lim_{p\to 0} p\cdot\varepsilon(p) = \lim_{p\to 0}\left(\frac{p^{\alpha+1}}{p^\alpha + K}E(p)\right)$$

$$\varepsilon_i = \lim_{p\to 0}\left(\frac{p^{\alpha+1}}{p^\alpha + K}\frac{E_0}{p}\right) = \lim_{p\to 0}\left(\frac{p^{\alpha}}{p^\alpha + K}E_0\right)$$

Il faut alors différentier les cas suivant la valeur de la classe du système α qui, pour rappel, est un entier positif ou nul.

Cas 1 : $\alpha = 0$

Il s'agit du cas où la FTBO ne comporte pas d'intégration. Dans ce cas il vient :

$$\varepsilon_i = \lim_{p\to 0}\left(\frac{p^{0}}{p^0 + K}E_0\right) = \frac{1}{1+K}E_0$$

L'erreur est non nulle et dépend du gain K de la FTBO, elle est d'autant plus petite que le gain est important.

Cas 2 : $\alpha > 0$

Dans ce cas la FTBO comporte au moins une intégration dans la boucle. Le système est de classe au moins 1.

$$\varepsilon_i = \lim_{p\to 0}\left(\frac{p^{\alpha}}{p^\alpha + K}E_0\right) = 0$$

L'erreur est donc nulle à l'infini quel que soit le gain K de la FTBO.

2.2 Erreur de trainage - entrée de type rampe

On appelle erreur de traînage ε_t, l'erreur mesurée entre une entrée de type rampe $e(t) = A_0\cdot t\cdot\mathcal{H}(t)$ et la sortie.

Rappel

Une rampe s'écrit dans le domaine de Laplace

$$e(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} E(p) = \frac{A_0}{p^2}$$

Comme précédemment :

$$\varepsilon_t = \lim_{p\to 0} p \cdot \varepsilon(p) = \lim_{p\to 0}\left(\frac{p^{\alpha+1}}{p^\alpha + K}E(p)\right)$$

$$\varepsilon_t = \lim_{p\to 0}\left(\frac{p^{\alpha+1}}{p^\alpha + K}\frac{A_0}{p^2}\right) = \lim_{p\to 0}\left(A_0 \cdot \frac{p^{\alpha-1}}{p^\alpha + K}\right)$$

L'erreur de traînage dépend comme l'erreur indicielle du gain K et de la classe du système. Nous pouvons distinguer trois cas en fonction de la valeur de α.

Cas 1 : $\alpha = 0$: Cas où la FTBO ne comporte aucune intégration.

$$\varepsilon_t = \lim_{p\to 0}\left(A_0 \cdot \frac{p^{-1}}{p^0 + K}\right) = +\infty$$

L'écart tend vers $+\infty$, la réponse temporelle de la sortie s'écarte de la consigne en rampe.

Cas 2 : $\alpha = 1$: Cas où la FTBO comporte une seule intégration.

$$\varepsilon_t = \lim_{p\to 0}\left(A_0 \cdot \frac{p^{0}}{p^1 + K}\right) = \frac{A_0}{K}$$

L'erreur est constante, la sortie est parallèle à l'entrée, décalée de ε_t.

Cas 3 : $\alpha > 1$: Le système est de classe au moins 2, la FTBO comporte au moins deux intégrations.

$$\varepsilon_t = \lim_{p\to 0}\left(A_0 \cdot \frac{p^{\alpha-1}}{p^\alpha + K}\right) = 0$$

L'erreur de traînage est nulle, la sortie rattrape l'entrée lorsque $t \to +\infty$.

2.3 Erreur d'accélération - entrée de type parabole

On appelle erreur en accélération ε_a, l'erreur mesurée entre une entrée de type rampe $e(t) = A_O \cdot t^2 \cdot \mathcal{H}(t)$ et la sortie.

Rappel

Une parabole s'écrit dans le domaine de Laplace

$$e(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} E(p) = \frac{2 \cdot A_0}{p^3}$$

$$\varepsilon_a = \lim_{p \to 0} \left(\frac{p^{\alpha+1}}{p^\alpha + K} \frac{A_0}{2 \cdot p^3} \right) = \lim_{p \to 0} \left(2 \cdot A_0 \cdot \frac{p^{\alpha-2}}{p^\alpha + K} \right)$$

Á nouveau il faut différentier en fonction de α :

Cas 1 : $0 \leq \alpha < 2$: Le système est de classe 0 ou 1.

$$\varepsilon_a = \lim_{p \to 0} \left(2 \cdot A_0 \cdot \frac{p^{\alpha-2}}{p^\alpha + K} \right) = +\infty$$

Cas 2 : $\alpha = 2$: Le système est de classe 2.

$$\varepsilon_a = \lim_{p \to 0} \left(2 \cdot A_0 \cdot \frac{p^0}{p^2 + K} \right) = \frac{2 \cdot A_0}{K}$$

Cas 3 : $\alpha > 2$: Le système est de classe au moins 3.

$$\varepsilon_a = \lim_{p \to 0} \left(2 \cdot A_0 \cdot \frac{p^{\alpha-2}}{p^\alpha + K} \right) = 0$$

3 Tableau récapitulatif des écarts

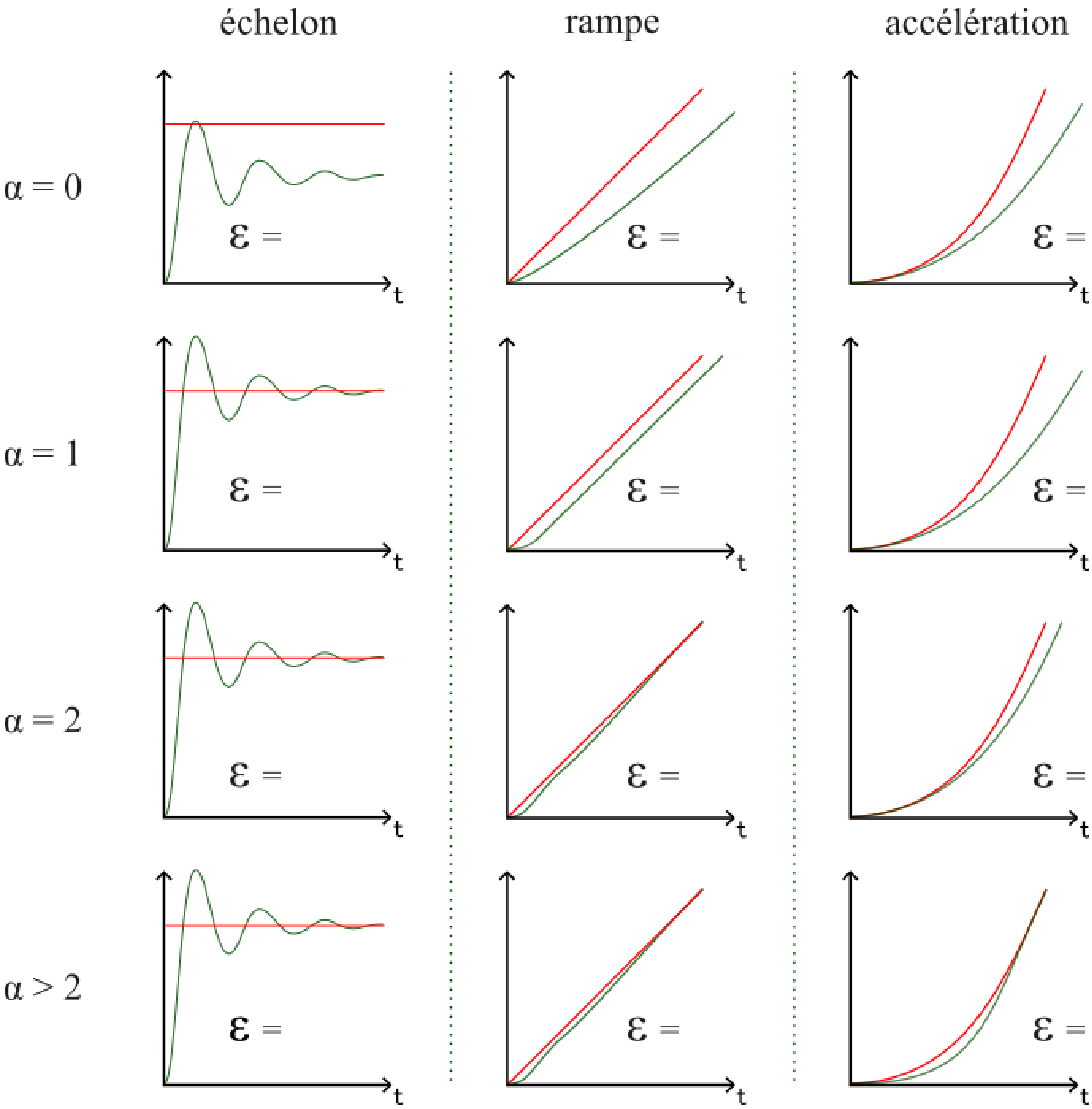


FIGURE 4 – Tableau récapitulatif des écarts en fonction de la classe du système et de l'entrée canonique.

À retenir

Ce tableau est à connaître *absolument*. Pas que les résultats mais ce qu'il indique.

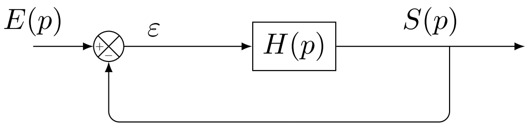
- On parle ici bien de la classe de la $FTBO(p)$.
- **Surtout, il est utilisable tel quel : sauf demande explicite dans la question du concours, ce sont des résultats de cours.**

Exemple:

Soit le schéma bloc ci-dessous, avec :

$$H(p) = \frac{10}{p(p+1)(p+3)}$$

On cherche les différents écarts.



Système de classe 1. Il vient d'après le tableau des écarts :

- $\epsilon_s = 0$
- $\epsilon_t = \dfrac{E_0}{10/3}$
- $\epsilon_a = +\infty$

4 Précision d'un système perturbé

Nous venons de répondre à la première partie de la question sur l'évaluation du critère de performance "*précision*", c'est-à-dire le cas **non perturbé**. Qu'en est il en présence d'une perturbation ? On parle alors de *fonctionnement en régulation*.

Définition *Fonctionnement en régulation*

Dans les systèmes régulateurs la consigne d'entrée est fixe. ces systèmes sont destinés à maintenir la sortie la plus constante possible quelles que soient les perturbations. (*ex : four, thermostat, régulateur de vitesse automobile...*)

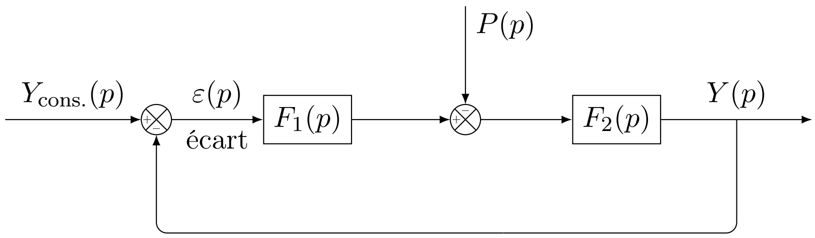


FIGURE 5 – Système asservi perturbé à retour unitaire.

TODO

Considérons le schéma-bloc ci-dessus, et exprimons littéralement l'écart en fonction des entrées du système (ici : $Y_{cons}(p)$ et $P(p)$).

Normalement vous devriez trouver un écart $\varepsilon(p)$ s'écrivant sous la forme :

$$\varepsilon(p) = \frac{1}{1 + F_1(p) \cdot F_2(p)} \cdot Y_{cons}(p) + \frac{F_2(p)}{1 + F_1(p) \cdot F_2(p)} \cdot P(p)$$

Propriété

L'erreur due à la perturbation s'ajoute à celle relative à l'entrée ! Ce qui semble logique en invoquant le théorème de superposition appliqué aux systèmes linéaires.

Comme précédemment nous allons considérer $F_1(p)$ et $F_2(p)$ sous les formes :

$$F_1(p) = \frac{K_1 \cdot N_1(p)}{p^{\alpha_1} \cdot D_1(p)} \text{ et } F_2(p) = \frac{K_2 \cdot N_2(p)}{p^{\alpha_2} \cdot D_2(p)}$$

avec $N_1(0) = D_1(0) = 1$, $N_2(0) = D_2(0) = 1$, $\alpha_1 \geq 0$, $\alpha_2 \geq 0$, $K_1 > 0$ et $K_2 > 0$.

Nous ne détaillerons ici que le cas d'une **perturbation constante**. Le reste, trivial, est laissé au lecteur (les autres types de perturbations se traitant de la même manière que précédemment).

Cas d'une perturbation constante

Rappel

On dit qu'un système de type entrée-sortie est linéaire ou relève du principe de superposition si :

- à la somme de deux entrées quelconques correspond la somme des deux sorties correspondantes,
- à un multiple d'une entrée quelconque correspond le même multiple de la sortie correspondante.

Ainsi, pour étudier l'effet de la perturbation seule, il suffit de poser $y_{cons}(t) = 0$. On en déduit l'écart relatif à la perturbation :

$$\varepsilon_p(p) = \frac{F_2(p)}{1 + F_1(p) \cdot F_2(p)} \cdot P(p)$$

Dans le cas d'une perturbation constante $p(t) = P_0 \cdot \mathcal{H}(t)$ on a dans le domaine de Laplace $P(p) = \frac{P_0}{p}$. Il vient :

$$\varepsilon_p(p) = \frac{F_2(p)}{1 + F_1(p) \cdot F_2(p)} \cdot \frac{P_0}{p}$$

en remplaçant $F_1(p)$ et $F_2(p)$:

$$\varepsilon_p(p) = \frac{K_2 \cdot N_2(p)}{p^{\alpha_2} \cdot D_2(p)} \cdot \frac{1}{1 + \frac{K_1 \cdot N_1(p)}{p^{\alpha_1} \cdot D_1(p)} \cdot \frac{K_2 \cdot N_2(p)}{p^{\alpha_2} \cdot D_2(p)}} \cdot \frac{P_0}{p}$$

$$\varepsilon_p(p) = \frac{K_2 \cdot N_2(p) \cdot p^{\alpha_1} \cdot D_1(p)}{p^{\alpha_1} \cdot D_1(p) \cdot p^{\alpha_2} \cdot D_2(p) + K_1 \cdot N_1(p) \cdot K_2 \cdot N_2(p)} \cdot \frac{P_0}{p}$$

De la même façon que précédemment, nous allons considérer le système comme stable. Cela signifie que nous avons le droit d'appliquer le théorème de la valeur finale (le système admet une limite).

$$\varepsilon_p = \lim_{t \to \infty} (\varepsilon(t)) = \lim_{p \to 0} (p \cdot \varepsilon_p(p))$$

avec $N_i(0) = D_i(0) = 1$, il vient :

$$\varepsilon_p = \lim_{p \to 0} \left(p \cdot \frac{K_2 \cdot p^{\alpha_1}}{p^{\alpha_1} \cdot p^{\alpha_2} + K_1 \cdot K_2} \cdot \frac{P_0}{p} \right)$$

avec $N_i(0) = D_i(0) = 1$, on obtient :

$$\varepsilon_p = \lim_{p \to 0} \left(P_0 \cdot \frac{K_2 \cdot p^{\alpha_1}}{p^{\alpha_1 + \alpha_2} + K_1 \cdot K_2} \right)$$

Propriété

De ce calcul il vient que l'erreur relative à la perturbation dépend de la classe de la fonction de transfert en amont de la perturbation α_1.

Il faut alors distinguer deux cas :

- **Cas où** $\alpha_1 = 0$: la fonction de transfert $F_1(p)$ en amont de la perturbation ne possède pas d'intégration. Dans ce cas, il est évident que $\varepsilon_p \neq 0$. on peut distinguer deux cas :
  - $\alpha_2 = 0$
$$\varepsilon_p = \lim_{p\to 0}\left(P_0 \cdot \frac{K_2 \cdot p^0}{p^0 + K_1 \cdot K_2}\right) = \frac{P_0 \cdot K_2}{1 + K_1 \cdot K_2}$$
  - $\alpha_2 > 0$
$$\varepsilon_p = \lim_{p\to 0}\left(P_0 \cdot \frac{K_2 \cdot p^0}{p^{\alpha_2} + K_1 \cdot K_2}\right) = \frac{P_0}{K_1}$$
- **Cas où** $\alpha_1 > 0$: la fonction de transfert $F_1(p)$ en amont de la perturbation possède au moins une intégration. il vient dans ce cas :
$$\varepsilon_p = \lim_{p\to 0}\left(P_0 \cdot \frac{K_2 \cdot p^{\alpha_1}}{p^{\alpha_1+\alpha_2} + K_1 \cdot K_2}\right) = 0$$
  Et là l'erreur statique, relative à la perturbation est nulle !

À retenir

Pour que l'erreur permanente ne dépende pas de la perturbation, il faut au moins une intégration en amont de la perturbation.

Remarque

La conclusion a priori évidente pour annuler l'écart est la présence d'intégrateur dans la boucle. On verra dans le chapitre suivant que si le système n'en possède pas ou pas assez, on peut lui en apporter à l'aide de *correcteurs*. Cependant, l'hypothèse que nous faisons à chaque fois est celle d'un **système stable**. Or, rajouter une intégration abaisse la phase de 90° ! Ce qui va diminuer les marges de phase, voir déstabiliser le système.

Il y aura donc toujours un compromis à trouver entre la stabilité (ou plutôt les marges de stabilité) et la précision.

5 Rapidité : définitions et propriétés

La rapidité d'un système est la capacité de celui-ci à atteindre dans les meilleurs délais son régime stable/permanent. La rapidité d'un système est définie par son temps de réponse t_r (plus t_r est petit plus le système est dit rapide).

Remarque

- Évidemment la notion de rapidité n'a de sens que dans pour un système atteignant un régime permanent, et donc stable.
- Par convention, on prend comme critère de rapidité le *temps de réponse* à 5%.

Définition *Temps de réponse à 5%*

On appelle *temps de réponse* à 5% d'un système, la durée prise par la réponse indicielle du système pour rentrer, sans plus en ressortir, dans la bande à ±5% de sa valeur finale (*c.f.* FIGURE 8). Il est noté : $t_{5\%}$.

6 Identification des temps de réponse pour des systèmes du premier et deuxième ordre en régime temporel

6.1 Temps de réponse d'un système du première ordre

Pour un système du premier ordre de fonction de transfert $H(p) = \dfrac{K}{1+\tau p}$ soumis à une entrée en échelon :

- le temps de réponse à 5% est $t_{5\%} = \ln(20) \times \tau$, soit $t_{5\%} \simeq 3\tau$;
- la valeur finale est atteinte sans dépassement.

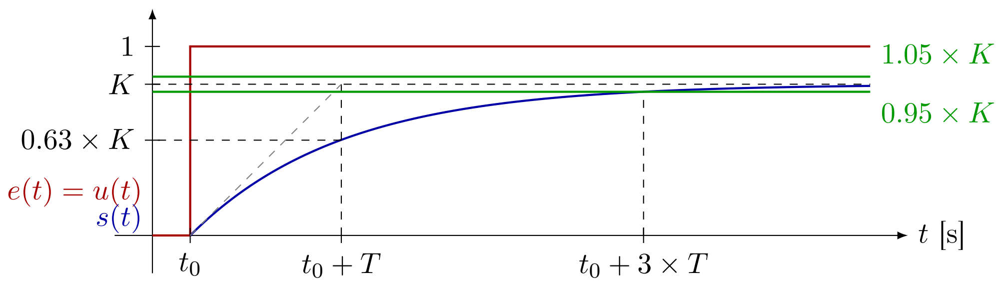


FIGURE 6 – Réponse indicielle d'un système d'ordre 1, pour un gain $K < 1$.

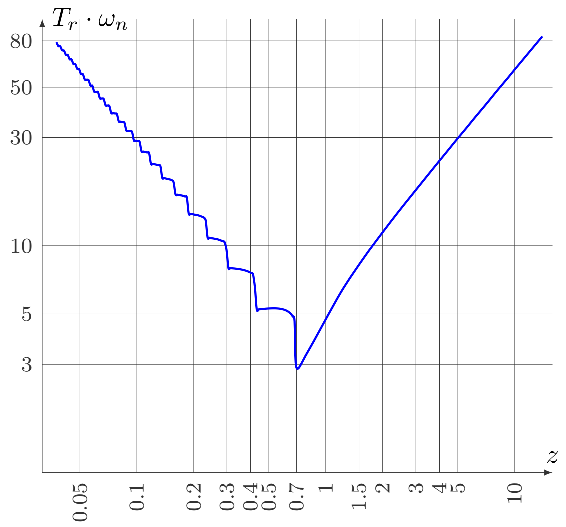
6.2 Temps de réponse d'un système du second ordre

Pour un système du second ordre de fonction de transfert $H(p) = \dfrac{K}{1 + \dfrac{2\xi p}{\omega_0} + \dfrac{p^2}{\omega_0^2}}$ soumis à une entrée en échelon :

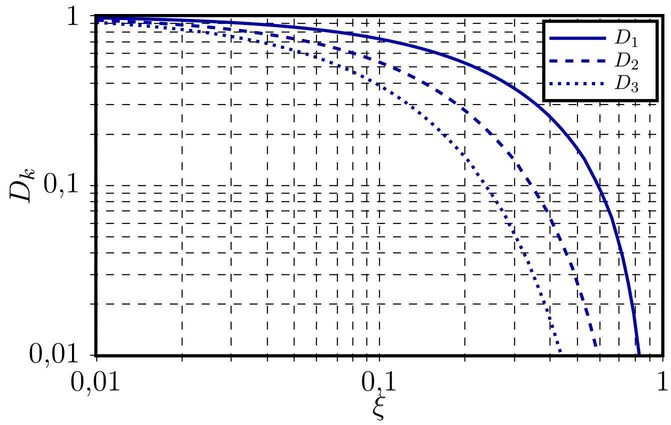
- Le temps de réponse à 5% ne peut pas être obtenu analytiquement comme dans le cas du premier ordre. Un abaque des *temps de réponse réduit* (*c.f.* FIGURE 7a ci-après) permet néanmoins de conclure sur le critère de rapidité. On observe deux valeurs remarquables :
  - ◇ Le temps de réponse réduit est minimal, égal à $t_{\text{réduit}} = 3$, pour un amortissement de $\xi = 0.69$;

◇ Pour un amortissement $\xi = 1$, le temps de réponse réduit vaut $t_{\text{réduit}} = 5$.

- la valeur finale ne possède pas de dépassement si $\xi \geqslant 1$, dans le cas contraire, un seconde abaque donne la relation des k premiers dépassements relatifs en fonction du coefficient d'amortissement (*c.f.* FIGURE 7b).



(a) Abaque du temps de réponse réduit d'un système du second ordre. $t_{\text{réponse réduit}} = tr_{5\%} \times \omega_0$



(b) Abaque des dépassements transitoires relatifs d'un système du second ordre. On a la relation : $D_k = D_{k\%}/100$

FIGURE 7 – Abaques nécessaires pour un deuxième ordre (dépassement et temps de réponse réduit)

Remarque

Les valeurs à retenir sont données ci-dessous.

1. Le temps de réponse réduit est minimum pour

$$tr_{5\%} \times \omega_0 \simeq 3 \qquad \rightarrow \qquad \xi \simeq 0.69$$

   On note que la valeur $0.69 < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$: le système de deuxième ordre le plus rapide est un système légèrement résonant.

2. Pour un système du second ordre en régime critique (le plus rapide sans dépassement) on a :

$$\xi = 1 \qquad \rightarrow \qquad tr_{5\%} \times \omega_0 \simeq 5$$

Remarque

On parle parfois de *temps de montée* et non de temps de réponse. En effet, selon le système considéré on peut se fixer deux critères différents pour caractériser la rapidité d'un système :

- rapidité sans prise en compte des dépassements : *temps de montée*

- rapidité avec prise en compte des dépassements : *temps de réponse à 5%*

Pour illustrer cette notion, voici un exemple de système d'ordre 2 avec un coefficient d'amortissement $\xi < 1$ et donc oscillant :

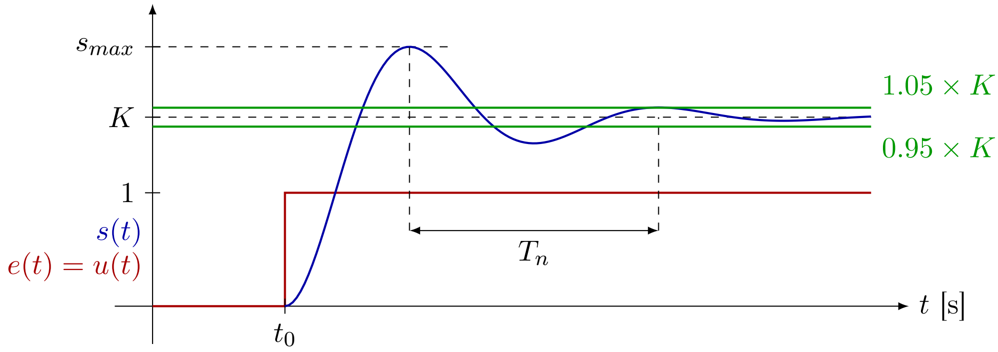


FIGURE 8 – Temps de réponse à 5% d'un système d'ordre 2, pour $\xi < 1$ et $K > 1$.

Enfin voilà un exemple de réponses temporelles d'un système du deuxième ordre en fonction de la valeur du coefficient d'amortissement ξ.

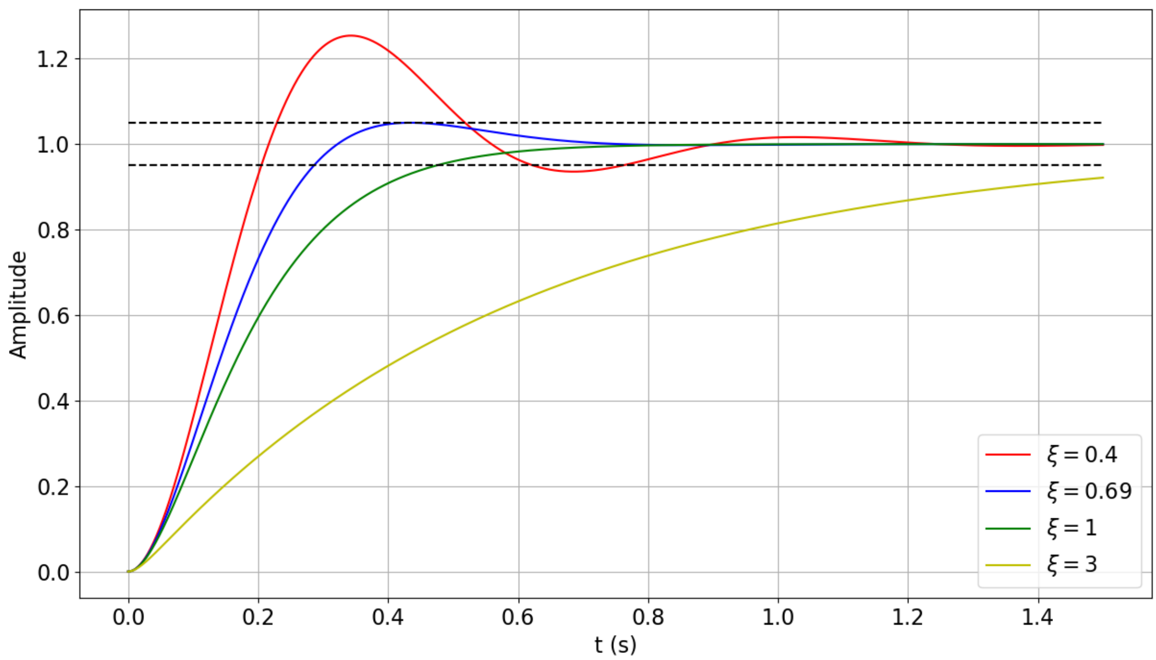


FIGURE 9 – Différentes réponses temporelles d'un système du deuxième ordre. On y voit bien la différence entre le temps de montée et le temps de réponse à 5%.

Remarque

Que limite le temps de montée/réponse à votre avis ?

7 Lien entre rapidité et bande passante

7.1 Domaine fréquentiel

On peut donner un lien entre la rapidité de la réponse temporelle et la *bande passante*. En effet, un système asservi se comporte comme un filtre passe-bas, c'est-à-dire un système linéaire qui ne « laisse passer » que les basses fréquences, les hautes fréquences sont fortement atténuées. Or, tout signal d'entrée peut se décomposer comme somme de signaux sinusoïdaux [1]...

Définition *Bande passante à X dB.*

La bande passante d'un système peut se définir comme sa faculté à transmettre **sans atténuation notable** les signaux sinusoïdaux qui le traversent.

- La bande passante à $-X$ dB est définie comme la plage de pulsations allant de $\omega = 0$ rad/s, à la puslation de coupure ω_c celle où le gain perd X dB par rapport à sa valeur initiale.
- **Exemple** : la bande passante à -3 dB correspond à une atténuation de la sortie d'environ 30% :

$$10^{\frac{-3}{20}} = 0.708 \simeq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ainsi, un signal d'entrée de pulsation inférieure à la pulsation de coupure ω_c est amplifié par le système dynamique ($K > 1$). Un signal d'entrée de pulsation supérieure à ω_c est atténué.

Remarque

Avec les mains, plus votre système est capable d'amplifier des signaux sinusoïdaux de hautes fréquences, plus il est capable de transmettre des dynamiques *rapides*.

7.2 Pour un premier ordre

Le lien entre rapidité et bande passante pour un premier ordre est trivial.

Considérons un système dont la boucle fermée s'écrit :

$$FTBF(p) = H_{BF}(p) = \frac{K_{BF}}{1 + \tau_{BF} \cdot p}$$

On sait alors que :

- Le temps de réponse à 5% est :

$$t_{5\%} = 3 \cdot \tau_{BF}$$

Mais nous savons aussi calculer la pulsation de coupure $\omega_{c\,-3\,\mathrm{dB}}$.

On cherche la pulsation, notée $\omega_{c\,-3\,\mathrm{dB}}$, telle que le gain soit diminué de 3 dB. On résout :

$$20 \log K - 3\,\mathrm{dB} = 20 \log |H_{BF}(j\omega_{c\,-3\,\mathrm{dB}})|$$

1. Merci Joseph Fourier (1768,1830), et ses séries publiées dans les années 1820. Pas le plus mauvais le bougre.

Il vient d'après la définition au dessus :

$$20\log|H_{BF}(j\omega_{c\,-3\,\mathrm{dB}})| = \frac{K}{\sqrt{1+(\tau_{BF}\omega_{c\,-3\,\mathrm{dB}})^2}} = 20\log\frac{K}{\sqrt{2}}$$

Soit :

$$\boxed{\omega_{c\,-3\,\mathrm{dB}} = \frac{1}{\tau_{BF}}}$$

À retenir

Pour un système du 1er ordre défini par $H_{BF}(p) = \dfrac{K_{BF}}{1+\tau_{BF}p}$, la bande passante à -3 dB est telle que $\mathrm{BP}_{-3\mathrm{dB}} = \left[0; \frac{1}{\tau_{BF}}\right]$ en rad/s.

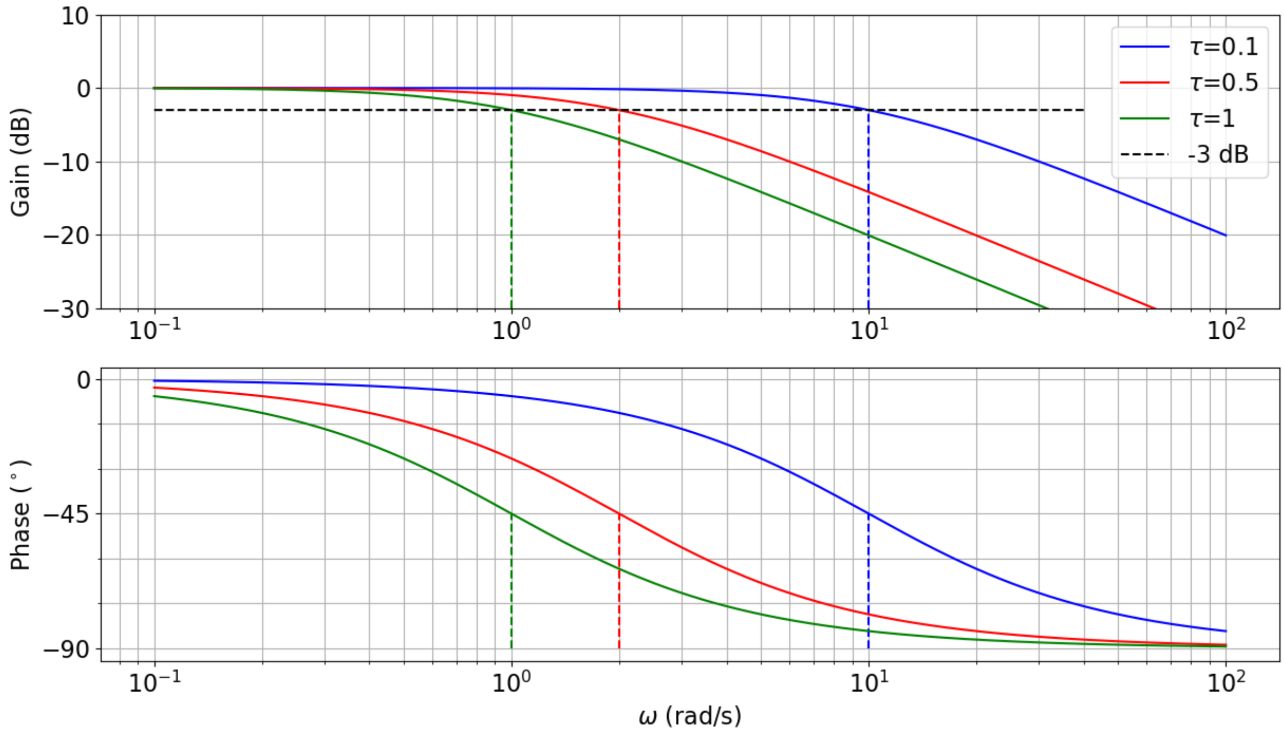


FIGURE 10 – Lien entre bande passante et temps de réponse pour un système du premier ordre : réponses fréquentielles pour différentes valeurs de τ_{BF}.

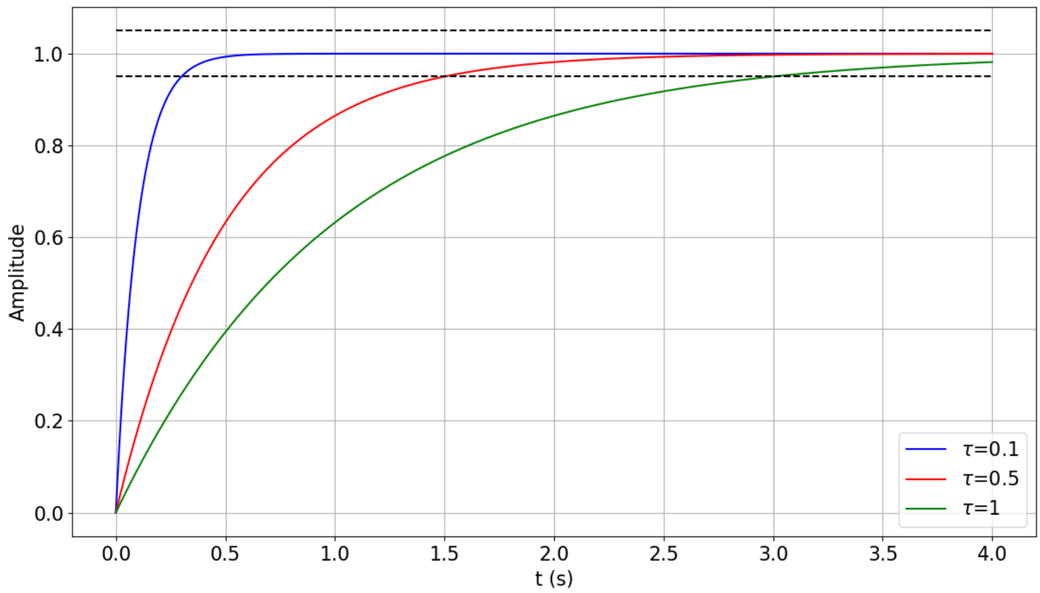


FIGURE 11 – Lien entre bande passante et temps de réponse pour un système du premier ordre : réponses temporelles associées.

Remarque

On a un lien clair entre bande passante et rapidité pour un premier ordre.

Cependant, les diagrammes de Bode à disposition sont généralement des Bode en **BOUCLE OUVERTE** [a].

a. Et oui, pour étudier la stabilité le critère du revers dans le plan de Bode se fait sur la $FTBO(p)$...

Lien bande passante en BF et en BO.

Considérons un premier ordre dont la fonction de transfert en boucle ouverte est :

$$H_{BO}(p) = \frac{K_{BO}}{1+\tau_{BO}\cdot p}$$

TODO

- Calculez ci-dessous la pulsation de coupure $\omega_{c\,-3\,\mathrm{dB}}$ de la $FTBF(p)$.
- Calculez la pulsation à laquelle le gain en dB de la $FTBO(p)$ est nul. Ce qui revient à résoudre l'équation suivante :
$$|H_{BO}(p)| = 1$$

- Très vite il vient :

$$H_{BF}(p) = \frac{\dfrac{K_{BO}}{1+K_{BO}}}{1+\dfrac{\tau_{BO}}{1+K_{BO}}}$$

Et d'après ce qui a été vu précédemment :

$$\omega_{c\,-3\,\mathrm{dB}} = \frac{K_{BO}+1}{\tau_{BO}}$$

- On cherche à résoudre $|H_{BO}(j\omega)| = 1$. Soit :

$$\frac{K}{\sqrt{1+(\tau_{BO}\omega_{0\,\mathrm{dB}})^2}} = 1$$

Il vient :

$$\omega_{0\,\mathrm{dB}} = \frac{\sqrt{K_{BO}^2-1}}{\tau_{BO}}$$

Propriété

On distingue alors deux pulsations :

- la pulsation de coupure à -3 dB de la $FTBF$ qui vaut ici :

$$\omega_{c\,-3\,\mathrm{dB}} = \frac{K_{BO}+1}{\tau_{BO}}$$

- la pulsation à partir de laquelle le gain en de la $FTBO$ est inférieur à 1 (signal amplifié). Cette pulsation vaut :

$$\omega_{0\,\mathrm{dB}} = \frac{\sqrt{K_{BO}^2-1}}{\tau_{BO}}$$

Or, si K_{BO} est important, ces deux pulsations se confondent ...

Remarque

Pour les autres cas, notamment les ordres supérieures, les calculs sont trop complexes. On constatera néanmoins que la tendance est conservée, notamment en TP et lors du chapitre sur les correcteurs...

À retenir

Pour un *SLCI* plus la bande passante est importante, plus faible sera le temps de montée et donc plus rapide sera le système.

Remarque : On peut tenter de généraliser en disant que si l'on souhaite diminuer le temps de réponse du système, il faut augmenter la bande passante mais il ne faut oublier que le temps de montée et le temps de réponse ne sont pas directement corrélés.

8 Notion de pôles dominants

Plus on modélise finement un système réel, plus sa fonction de transfert est d'un ordre élevé. En parallèle, on constate que son comportement dynamique reste très voisin de systèmes de fonction de transfert d'ordre inférieur. Si les différences comportementales sont faibles, il peut être intéressant de substituer au modèle complexe un modèle simplifié, dont l'étude est plus économique.

Une fonction de transfert $F(p)$ quelconque, peut être mise sous la forme de produits et rapports de monômes.

$$F(p) = K\frac{\Pi_{j=1}^{m}(p-z_j)}{\Pi_{i=1}^{n}(p-p_i)}$$

Sous cette forme, la fonction de transfert peut être décomposée en éléments simples. Dans le cas où $m<n$, la décomposition de $F(p)$ est de la forme :

$$F(p) = \sum^{i}\frac{A_i}{(p-p_i)} + \sum^{j}\frac{A_j p + B_j}{(p-\sigma_j)^2+\omega_j^2}$$

Définition *Pôle dominant*

On appelle *pôle dominant* d'un système, un pôle ayant une contribution significative dans son comportement dynamique. Ils sont situés le plus proche de l'*axe des imaginaires purs*.

S'ils sont suffisamment éloignés des pôles dominants, les pôles les plus éloignés de l'axe imaginaire peuvent être négligés, ce qui permet de diminuer l'ordre de la fonction de transfert $F(p)$ modélisant le système. On peut ainsi conduire les choix de correcteurs, évaluer les performances attendues d'un système en limitant la complexité des calculs.

8.1 Exemple

Le système décrit par la fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{100}{(p+1)(p+100)} = \frac{1}{(1+p)(1+p/100)}$$

possède deux pôles simples, qui sont réels négatifs : $p_1 = -1$ et $p_2 = -100$. La rapidité de conver-

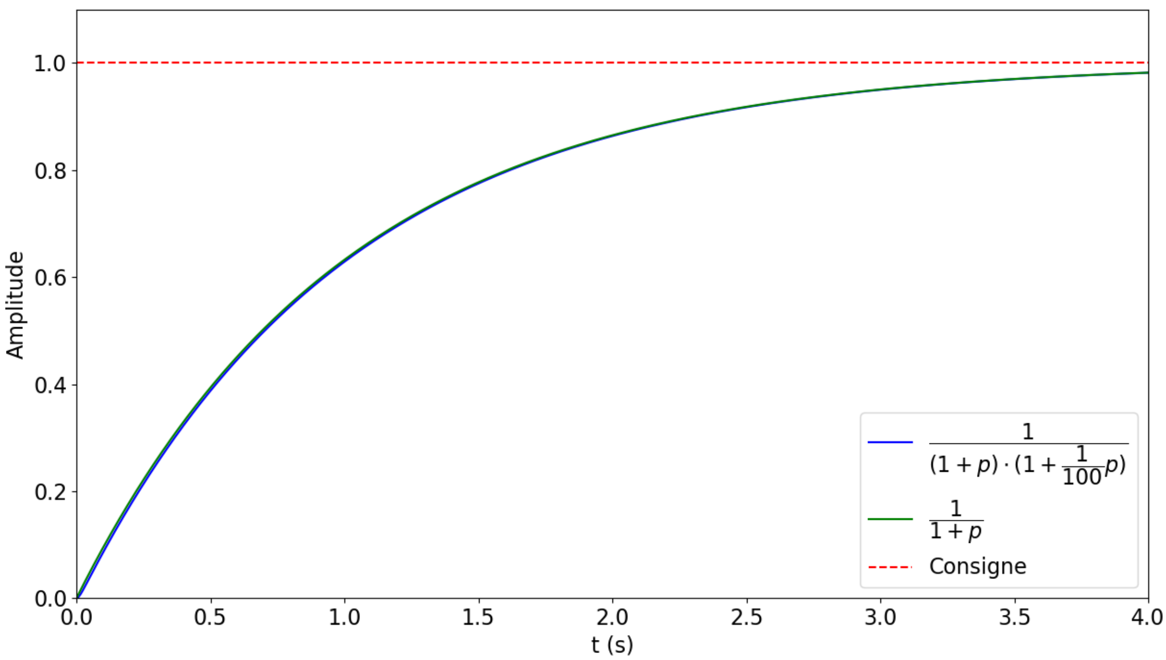


FIGURE 12 – Réponse temporelle de la fonction de transfert complète, et celle tronquée du pôle le plus rapide.

gence de e^{-100t} devant e^{-t} pourra permettre, si nécessaire, de négliger la contribution du pôle $p_2 = -100$ et donc d'approximer la fonction de transfert par :

$$H(p) \simeq \frac{1}{1+p}$$

Le pôle -1 est alors qualifié de *pôle dominant*.

Les pôles dominants sont ainsi les pôles les plus proches de l'axe des imaginaires purs. Bien entendu, cette considération n'a de sens que concernant les pôles de la zone de stabilité.

8.2 Sur un système oscillant

Dans l'exemple suivant, la fonction de transfert en boucle fermée du système s'écrit :

$$H(p) = \frac{1}{(0.1p^2 + 0.1p + 1) \cdot (5.10^{-3}p^2 + 2.10^{-3}p + 1)}$$

On déduit très vite quel second ordre aura la contribution la plus *lente*. En effet il suffit de regarder le terme en ω_0^2...

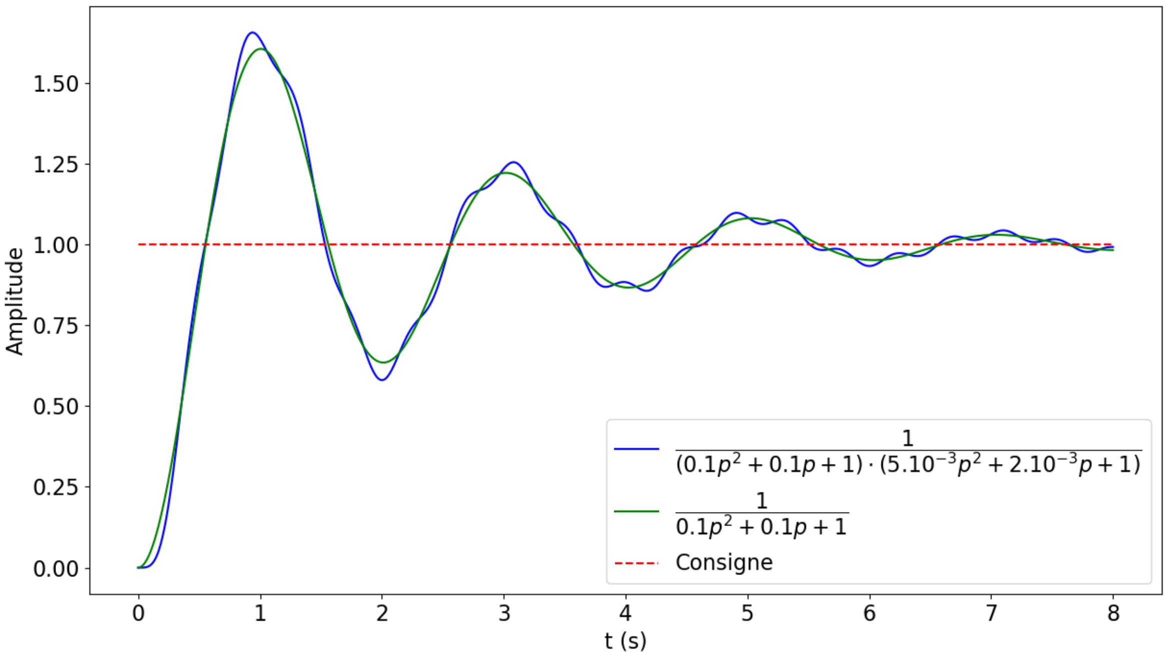


Figure 13 – Illustration des pôles dominants pour un système oscillant

Dans ce cas les pôles de la fonction de transfert sont les suivants :

$$p_1 = -0.2 \pm 14.14072134j \qquad \text{et} \qquad p_2 = -0.5 \pm 3.122499j$$

À retenir

On retrouve bien que plus la partie réelle (toujours négative pour des raisons de stabilité) est grande, c'est-à-dire, plus le pôle est proche de l'axe des imaginaires, plus la dynamique du système est influencée par ce pôle.

8.3 Sur un système non-oscillant

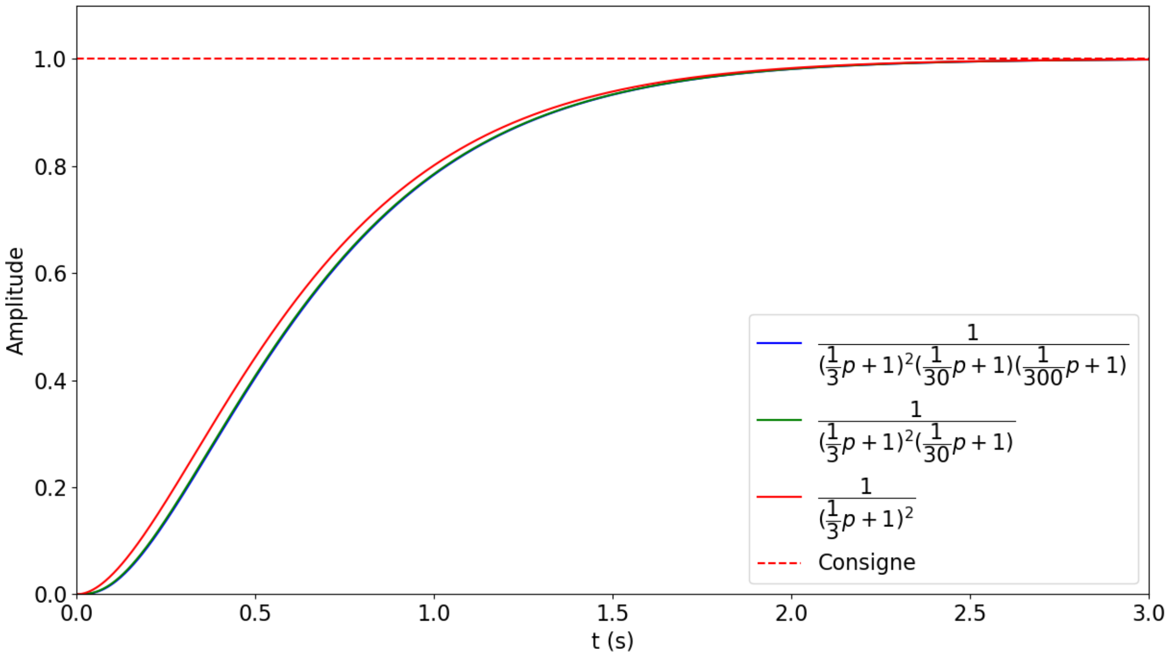


FIGURE 14 – Illustration des pôles dominants pour un système non oscillant