TD+ 01

Intégrales à paramètres

Exercice 1. [produit de fonctions intégrables]

1. Soit u continue bornée sur $\mathbb{R}$. Démontrer que pour toute fonction v continue intégrable sur $\mathbb{R}$, uv est intégrable sur $\mathbb{R}$.
2. Réciproquement, soit u continue sur $\mathbb{R}$ telle que pour toute fonction v continue intégrable sur $\mathbb{R}$, uv soit intégrable. Démontrer que u est bornée sur $\mathbb{R}$.
3. Soit u continue sur $\mathbb{R}$. Démontrer que si pour toute fonction v continue bornée, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} uv$ converge, alors u est intégrable.

Exercice 2. [Transformée de Fourier et produit de convolution]
Soit $\mathscr{S}$ l'ensemble des fonctions $\mathscr{C}^\infty$ f telles que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(x)x^k \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0$.

Pour tout f dans $\mathscr{S}$ et ξ dans $\mathbb{R}$, on définit $\hat{f}(\xi) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ix\xi}\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que $\mathscr{S}$ n'est pas réduit à $\{0\}$.
2. Montrer que pour tout f de $\mathscr{S}$, $\hat{f} \in \mathscr{S}$.
3. (a) Soit $G : x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}}$. Donner la valeur de $\hat{G}(0)$.
   (b) Montrer que pour tout ξ de $\mathbb{R}$, $\hat{G}(\xi) = \sqrt{2\pi}G(\xi)$.
4. Vérifier que si f est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ et g est une fonction bornée sur $\mathbb{R}$, alors pour tout x réel, la quantité
$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t$$
existe. On appelle $f * g$ produit de convolution de f et g.
5. Vérifier que $f * g(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t$.
6. Démontrer que si f et g sont dans $\mathscr{S}$, alors $f * g$ est dans $\mathscr{S}$.
7. En s'autorisant à intervertir les deux intégrales que vous trouverez dans vos calculs, démontrer que si f et g sont dans $\mathscr{S}$, alors $\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}$.

Exercice 3. [Transformée de Laplace]
Si $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ est une fonction continue par morceaux, on définit la transformée de Laplace de f par
$$\mathscr{L}(f)(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\,\mathrm{d}t,$$
dès que cette intégrale existe.

1. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$, continue par morceaux, admettant une limite finie ℓ en $+\infty$. Montrer que $\mathscr{L}(f)$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $\displaystyle\lim_{p\to 0^+} p\mathscr{L}(f)(p) = \ell$.
2. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$, continue, telle que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ soit convergente (sans que nécessairement f soit intégrable). Montrer que $\mathscr{L}(f)$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.
3. Utiliser ce résultat pour calculer l'intégrale de Dirichlet $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 4. [Méthode de Laplace]
Soit f une fonction continue sur $[0,+\infty[$, telle que $f(0) \neq 0$, et φ une fonction $\mathscr{C}^1$ et strictement croissante sur $[0,+\infty[$ telle que $\varphi(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
On suppose qu'il existe un réel t_0 tel que $x \mapsto e^{-t_0\varphi(x)} f(x)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$. On définit, pour tout $t \geqslant t_0$ la fonction

$$F_{\varphi,f} : t \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t\varphi(x)} f(x)\,\mathrm{d}x$$

1. Justifier l'existence de $F_{\varphi,f}$.
   Dans la suite, on prend $t_0 = 0$. (on justifiera brièvement la possibilité de se ramener à ce cas)
2. Dans cette question, $\varphi : x \mapsto x$. On écrira F à la place de $F_{\varphi,f}$ pour alléger les notations.
   (a) Montrer que pour tout $\alpha \in]0,+\infty[$, $t\displaystyle\int_\alpha^{+\infty} e^{-t\varphi(x)} f(x)\,\mathrm{d}x \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
   (b) Montrer que pour tout $\alpha \in]0,+\infty[$, $\displaystyle\int_0^{\alpha} e^{-t\varphi(x)} f(x)\,\mathrm{d}x \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{f(0)}{t}$.
   (c) En déduire un équivalent de F quand t tend vers $+\infty$.
3. On généralise le résultat précédent, en supposant $\varphi(0) = 0$ et $\varphi'(t) > 0$ pour tout t dans $[0,+\infty[$. En utilisant un changement de variables (et en justifiant que φ est une bijection), montrer que
$$F(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\varphi'(0)}\frac{f(0)}{t}.$$
4. On suppose dans cette question que $\varphi(x) = x^2$. Montrer que $F(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{\pi} f(0)}{2\sqrt{t}}$.
   On pourra utiliser sans le démontrer le résultat suivant : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
5. On généralise le résultat précédent : on suppose $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = 0$, $\varphi' > 0$ sur $]0,+\infty[$ et $\varphi''(0) > 0$.
   Montrer que $\psi : x \mapsto \sqrt{\varphi(x)}$ est une bijection $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ et que : $F(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2\varphi''(0)}}\dfrac{f(0)}{\sqrt{t}}$.

Indications.

Ex1 : 2. Exprimer le fait que u ne soit pas bornée : utiliser alors des intervalles $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sur lesquels u est supérieur à k, et construire ainsi une fonction intégrable telle que uv ne soit pas intégrable.
3. Construire une fonction v telle que uv ressemble beaucoup à $|u|$.

Ex2 : 1. On pensera aux croissances comparées.
2. On montrera que pour tout ξ, $\widehat{f'}(\xi) = i\xi\hat{f}(\xi)$ et que si $g : x \mapsto ixf(x)$, alors $\hat{g} = -(\hat{f})'(\xi)$.
3. (b) Faire un changement de variables.
(c) On montrera que $\hat{G}$ vérifie la même équation différentielle que G.
4. Les 4 dernières questions sont assez simples normalement.

Ex3 : 1. Essayer de majorer $|p\mathscr{L}\{f\}(p) - \ell|$, et séparer l'intégrale en deux parties (de 0 à A et de A à $+\infty$). Utiliser ensuite des ε.
2. Utiliser l'unique primitive F de f qui s'annule en 0 et faire une intégration par parties.
3. Calculer pour cela la transformée de Laplace de $t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t}$. Afin de faire cela, si g est la transformée de Laplace de cette fonction, dériver g, et calculer l'intégrale obtenue.

Ex4 : 2. (a) Utiliser l'intégrabilité de f.
(b) Effectuer un changement de variables et une convergence dominée.
(c) Rassembler les deux résultats.
3. Faire un changement de variables.
4. Même type de raisonnement qu'en 3.
5. Faire un changement de variables $\psi = \sqrt{\varphi}$.

⋆⋆⋆⋆⋆ FIN ⋆⋆⋆⋆⋆