Feuille d'exercices n°21

Dans ce qui suit, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exercice 1 (**)

Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension $n \geqslant 2$ et $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. On suppose que E est le seul sev non nul stable par u.

1. L'endomorphisme u possède-t-il des valeurs propres ?
2. Montrer que pour tout $x \neq 0_{\mathrm{E}}$, la famille $\mathscr{L}_x = (x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x))$ est une base de E.
3. Déterminer $\mathrm{mat}_{\mathscr{L}_x} u$. Cette matrice dépend-elle du choix de $x \in \mathrm{E} \setminus \{0_{\mathrm{E}}\}$?

Corrigé : 1. S'il existe λ réel et $x \in \mathrm{E} \setminus \{0_{\mathrm{E}}\}$ tel que $u(x) = \lambda x$, alors la droite vectorielle $\mathrm{Vect}\,(x)$ est stable par u ce qui contredit l'hypothèse. Ainsi

$$\boxed{\text{L'endomorphisme } u \text{ n'admet aucune valeur propre.}}$$

2. Soit $x \neq 0_{\mathrm{E}}$. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a $\chi_u(u) = 0$ d'où $u^n(x) \in \mathrm{Vect}\,(\mathscr{L}_x)$. Ainsi, l'espace $\mathrm{Vect}\,(\mathscr{L}_x)$ est stable et non trivial d'où $\mathscr{L}_x$ famille génératrice et de cardinal égal à $\dim \mathrm{E}$ d'où

$$\boxed{\text{Pour } x \neq 0_{\mathrm{E}}, \text{ la famille } \mathscr{L}_x \text{ est une base de E.}}$$

Remarque : Sans le théorème de Cayley-Hamilton, si $\mathscr{L}_x$ est liée, on choisit

$$p = \max\left\{k \in \mathbb{N}^* \mid (x, \ldots, u^{k-1}(x)) \text{ libre}\right\}$$

qui est bien défini comme maximum d'une partie non vide de $\mathbb{N}^*$ majorée par $n-1$. La famille $(x, \ldots, u^p(x))$ est liée d'où l'existence de scalaires a_i tels que $u^p(x) = \sum\limits_{i=0}^{p-1} a_i u^i(x)$. Par suite, l'espace $\mathrm{Vect}\,(x, \ldots, u^{p-1}(x))$ est stable, non trivial et distinct de E ce qui est exclu.

3. Soit $x \neq 0_{\mathrm{E}}$. On a $u^n(x) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} a_i u^i(x)$ d'où

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{L}_x} u = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & \ldots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Soit $y \neq 0_{\mathrm{E}}$. On a $y = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \alpha_i u^i(x)$ avec les α_i réels. L'algèbre $\mathbb{R}[u]$ étant commutative, il vient

$$\begin{aligned} u^n(y) &= \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i u^n(u^i(x)) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i u^i(u^n(x)) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i u^i \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k(x)\right) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k \left(\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i u^i(x)\right) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k(y) \end{aligned}$$

Ainsi $$\boxed{\text{La matrice } \mathrm{mat}_{\mathscr{L}_x} u \text{ ne dépend pas du choix de } x \in \mathrm{E} \setminus \{0_{\mathrm{E}}\}.}$$

Variante : D'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a

$$u^n = -\operatorname{Tr}(u)u^{n-1} + \ldots + (-1)^{n+1}\det(u)\,\mathrm{id}$$

d'où $$u^n(x) = -\operatorname{Tr}(u)u^{n-1}(x) + \ldots + (-1)^{n+1}\det(u)x$$

et les coefficients ne dépendent pas du choix de $x \neq 0_{\mathrm{E}}$ ce qui prouve que la matrice $\mathrm{mat}_{\mathscr{L}_x} u$ ne dépend pas de ce choix. Cette variante utilise de manière essentielle le théorème de Cayley-Hamilton.

Exercice 2 (**)

Soit $\mathrm{E} = \{f \in \mathscr{C}^0([\,0\,;+\infty\,[\,,\mathbb{R}) \mid f(0) = 0\}$. On pose

$$\forall f \in \mathrm{E} \qquad \mathrm{T}(f)(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Justifier que E est un $\mathbb{R}$-ev et $\mathrm{T} \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$.
2. Déterminer les éléments propres de T.

Corrigé : 1. Notant $\varphi : \mathscr{C}([\,0\,;+\infty\,[\,,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, f \mapsto f(0)$, on a $\mathrm{E} = \operatorname{Ker}\varphi$ sev de $\mathscr{C}([\,0\,;+\infty\,[\,,\mathbb{R})$. Soit $f \in \mathrm{E}$. On a $\mathrm{T}(f)$ continue sur $]\,0\,;+\infty\,[$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]\,0\,;+\infty\,[$. Puis, notant $\mathrm{F} : x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$, on a

$$\forall x > 0 \qquad \mathrm{T}(f)(x) = \frac{\mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(0)}{x - 0} \xrightarrow[x \to 0]{} \mathrm{F}'(0) = f(0) = 0$$

Ainsi, l'application T est à valeurs dans E et T est linéaire par linéarité de l'intégrale et du produit. Ainsi

$$\boxed{\text{L'ensemble E est un } \mathbb{R}\text{-ev et } \mathrm{T} \in \mathscr{L}(\mathrm{E}).}$$

2. Soit λ réel et $f \in \mathrm{E} \setminus \{0\}$ tel que $\mathrm{T}(f) = \lambda f$. Ainsi

$$\forall x \geqslant 0 \qquad \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \lambda x f(x)$$

Par dérivation, il vient

$$\forall x \geqslant 0 \qquad \lambda x f'(x) + (\lambda - 1)f(x) = 0$$

Si $\lambda = 0$, alors f est nulle ce qui est exclu. Pour λ non nul, on trouve

$$f \in \operatorname{Vect}(x \mapsto x^\alpha) \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{1-\lambda}{\lambda}$$

On veut f continue en 0 avec $f(0) = 0$ ce qui impose $\alpha > 0$ d'où $\lambda \in \,]\,0\,;1\,[$. Réciproquement, on vérifie sans difficulté que $\operatorname{Vect}(x \mapsto x^\alpha)$ est bien une droite de vecteurs propres et on conclut

$$\boxed{\forall \lambda \in \,]\,0\,;1\,[\qquad \alpha = \frac{1-\lambda}{\lambda} \text{ valeur propre de T et } \mathrm{E}_\alpha(\mathrm{T}) = \operatorname{Vect}(x \mapsto x^\alpha)}$$

Exercice 3 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$.

1. Soit $x \in \mathrm{E} \smallsetminus \{0_\mathrm{E}\}$. Justifier qu'il existe un unique polynôme unitaire $\pi_{u,x} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ vérifiant $\pi_{u,x}(u)(x) = 0_\mathrm{E}$ et divisant tout polynôme $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ vérifiant $\mathrm{P}(u)(x) = 0_\mathrm{E}$.
2. On suppose $\pi_u = \mathrm{P}^r$ avec P irréductible et r entier non nul. Montrer qu'il $x \in \mathrm{E} \smallsetminus \{0_\mathrm{E}\}$ tel que $\pi_{u,x} = \pi_u$.

Corrigé : 1. Soit $x \in \mathrm{E} \smallsetminus \{0_\mathrm{E}\}$. On pose

$$\mathrm{I}_x = \{\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}] \mid \mathrm{P}(u)(x) = 0_\mathrm{E}\}$$

On vérifie sans difficulté que I_x est un idéal de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$, non nul car $\pi_u \in \mathrm{I}_x$ avec $\pi_u \neq 0$. Ainsi, d'après le théorème de structure des idéaux de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$

$$\boxed{\text{Pour } x \in \mathrm{E} \smallsetminus \{0_\mathrm{E}\}, \text{ il existe } \pi_{u,x} \text{ unitaire qui engendre l'idéal } \mathrm{I}_x.}$$

2. Pour $x \in \mathrm{E} \smallsetminus \{0_\mathrm{E}\}$, on a $\pi_u \in \mathrm{I}_x$ d'où $\pi_{u,x} | \pi_u = \mathrm{P}^r$ donc $\pi_{u,x}$ est de la forme P^α avec $\alpha \in [\![1\,;\, r]\!]$. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ base de E. Pour tout $i \in [\![1\,;\, n]\!]$, il existe $\alpha_i \in [\![1\,;\, r]\!]$ tel que $\pi_{u,e_i} = \mathrm{P}^{\alpha_i}$. On choisit $\alpha_q = \underset{i \in [\![1\,;\, n]\!]}{\mathrm{Max}}\ \alpha_i$. Ainsi, on a

$$\forall i \in [\![1\,;\, n]\!] \qquad \pi_{u,e_q}(u)(e_i) = \mathrm{P}^{\alpha_q}(u)(e_i) = \mathrm{P}^{\alpha_q - \alpha_i}(u) \circ \mathrm{P}^{\alpha_i}(u)(e_i) = 0$$

ce qui prouve que π_{u,e_q} s'annule sur la base $\mathscr{B}$ donc est nul. Il s'ensuit $\pi_u | \pi_{u,e_q}$ et ces polynômes sont donc associés et unitaires donc égaux. On conclut

$$\boxed{\text{Si } \pi_u = \mathrm{P}^r \text{ avec P irréductible et } r \text{ entier non nul, il existe } x \in \mathrm{E} \smallsetminus \{0_\mathrm{E}\} \text{ tel que } \pi_{u,x} = \pi_u.}$$

Exercice 4 (***)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ avec $\mathrm{rg}\ \mathrm{A} = 2$. Déterminer une expression de χ_A en fonction de $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{A})$ et $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}^2)$.

Corrigé : En complétant une base du noyau de A en base de $\mathbb{K}^n$, on trouve que A est semblable à $\mathrm{M} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathrm{B} \\ \hline 0 & \mathrm{A}' \end{array}\right)$ avec $\mathrm{A}' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Ainsi, on a

$$\chi_\mathrm{A} = \mathrm{X}^{n-2}(\mathrm{X} - (a+d)\mathrm{X} + ad - bc) = \mathrm{X}^{n-2}(\mathrm{X}^2 - \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A})\mathrm{X} + ad - bc)$$

On calcule (par blocs) A^2 et il vient

$$\mathrm{M}^2 = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathrm{BA}' \\ \hline 0 & \mathrm{A}'^2 \end{array}\right) \quad \text{et} \quad \mathrm{A}'^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + dc & bc + d^2 \end{pmatrix}$$

Ainsi $\qquad \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A})^2 - \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}^2) = (a+d)^2 - (a^2 + 2bc + d^2) = 2(ad - bc)$

Et par conséquent $\qquad \boxed{\chi_\mathrm{A} = \mathrm{X}^{n-2}\left(\mathrm{X}^2 - \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A})\mathrm{X} + \dfrac{(\mathrm{Tr}\ \mathrm{A})^2 - \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}^2)}{2}\right)}$

Exercice 5 (***)

Soit E un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie, f et g dans $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ tels que

$$f \circ g - g \circ f \in \mathrm{Vect}\,(f, g)$$

Montrer que f et g admettent au moins un vecteur propre commun.

Corrigé : On a $f\circ g-g\circ f=\alpha f+\beta g$ avec α, β complexes. Les cas $\alpha=\beta=0$ et $(\alpha,\beta)=(1,0)$ ont été traités antérieurement. Si $\alpha\neq 0$ et $\beta=0$, posant $h=\dfrac{1}{\alpha}g$, on se ramène à $f\circ h-h\circ f=f$ déjà vu. Si $\alpha=0$ et $\beta\neq 0$, posant $h=-f$, on se ramène au cas $g\circ h-h\circ g=\beta g$. Supposons enfin α et β non nuls. On pose $h=\alpha f+\beta g$. Il vient

$$f\circ h-h\circ f=\alpha f^2+\beta f\circ g-\alpha f^2-\beta g\circ f=\beta(f\circ g-g\circ f)=\beta h$$

d'où h et f admettent un vecteur propre commun et par conséquent, $\dfrac{1}{\beta}(h-\alpha f)$ et f également et on conclut

$$\boxed{\text{Les endomorphismes } f \text{ et } g \text{ ont un vecteur propre commun.}}$$

Exercice 6 (**)

Soit u un endomorphisme de E un $\mathbb{K}$-ev admettant un polynôme minimal π_u et $\mathrm{P}\in\mathbb{K}[\mathrm{X}]$.

1. Montrer $\qquad \mathrm{P}(u)\in\mathrm{GL}(\mathrm{E}) \iff \mathrm{P}\wedge\pi_u=1$
2. Montrer que si $\mathrm{P}(u)\in\mathrm{GL}(\mathrm{E})$, alors $\mathrm{P}(u)^{-1}\in\mathbb{K}[u]$.

Corrigé : 1. Si $\mathrm{P}\wedge\pi_u=1$, d'après le théorème de Bezout, il existe $(\mathrm{A},\mathrm{B})\in\mathbb{K}[\mathrm{X}]^2$ tel que $\mathrm{AP}+\mathrm{B}\pi_u=1$ d'où

$$\mathrm{A}(u)\circ\mathrm{P}(u)+\mathrm{B}(u)\circ\pi_u(u)=\mathrm{id}\iff\mathrm{A}(u)\circ\mathrm{P}(u)=\mathrm{id}$$

d'où le sens indirect. Supposons $\mathrm{P}\wedge\pi_u\neq 1$. Notons $\mathrm{D}=\mathrm{P}\wedge\pi_u$. Comme D divise P et π_u, on a $\mathrm{P}=\mathrm{QD}$ et $\pi_u=\mathrm{RD}$ avec Q et D polynômes non constants. Puis

$$\mathrm{R}(u)\circ\mathrm{P}(u)=\mathrm{R}(u)\circ\mathrm{D}(u)\circ\mathrm{Q}(u)=\pi_u(u)\circ\mathrm{Q}(u)=0$$

Or $\mathrm{R}(u)\neq 0$ puisque $\deg\mathrm{R}<\deg\pi_u$ d'où $\mathrm{P}(u)\notin\mathrm{GL}(\mathrm{E})$. Ainsi

$$\boxed{\mathrm{P}(u)\in\mathrm{GL}(\mathrm{E})\iff\mathrm{P}\wedge\pi_u=1}$$

2. D'après ce qui précède, on a vu que si $\mathrm{P}(u)$ est inversible, alors il existe $\mathrm{A}\in\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ tel que $\mathrm{A}(u)\circ\mathrm{P}(u)=\mathrm{id}$, autrement dit $\mathrm{A}(u)=\mathrm{P}(u)^{-1}$ et donc

$$\boxed{\text{Si } \mathrm{P}(u)\in\mathrm{GL}(\mathrm{E}), \text{ alors } \mathrm{P}(u)^{-1}\in\mathbb{K}[u].}$$

Exercice 7 (****)

Soit $\mathrm{E}=\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $(\mathrm{A},\mathrm{B})\in\mathrm{E}^2$ et on pose $\varphi(\mathrm{M})=\mathrm{AM}+\mathrm{MB}$ pour tout $\mathrm{M}\in\mathrm{E}$. Établir

$$\mathrm{Sp}\,(\varphi)=\mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})+\mathrm{Sp}\,(\mathrm{B})$$

Corrigé : Remarquons en premier lieu que $\chi_{\mathrm{B}}=\chi_{\mathrm{B}^\top}$ puisqu'un déterminant est invariant par transposition. Soit $\mathrm{X}\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ avec $\mathrm{X}\neq 0$ telle que $\mathrm{AX}=\lambda\mathrm{X}$ et $\mathrm{Y}\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ avec $\mathrm{Y}\neq 0$ telle que $\mathrm{B}^\top\mathrm{Y}=\mu\mathrm{Y}$ avec λ,μ des scalaires. Pour $\mathrm{M}=\mathrm{XY}^\top$, on obtient

$$\varphi(\mathrm{M})=\mathrm{AM}+\mathrm{MB}=\mathrm{AXY}^\top+\mathrm{X}\big(\mathrm{B}^\top\mathrm{Y}\big)^\top=\lambda\mathrm{XY}^\top+\mathrm{X}(\mu\mathrm{Y})^\top=(\lambda+\mu)\mathrm{XY}^\top=(\lambda+\mu)\mathrm{M}$$

et $\mathrm{M}=\big(x_iy_j\big)\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ n'est pas nulle d'où l'inclusion

$$\mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})+\mathrm{Sp}\,(\mathrm{B})\subset\mathrm{Sp}\,(\varphi)$$

Soit $\mathrm{M}\in\mathrm{E}\smallsetminus\{0\}$ telle que $\varphi(\mathrm{M})=\alpha\mathrm{M}$. On a

$$\mathrm{AM}+\mathrm{MB}=\alpha\mathrm{M}\iff\mathrm{AM}=\mathrm{M}(\alpha\mathrm{I}_n-\mathrm{B})$$

Par récurrence immédiate, on obtient alors

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{A}^k\mathrm{M} = \mathrm{M}(\alpha\mathrm{I}_n - \mathrm{B})^k$$

et par combinaison linéaire

$$\forall \mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}] \qquad \mathrm{P}(\mathrm{A})\mathrm{M} = \mathrm{M}\,\mathrm{P}(\alpha\mathrm{I}_n - \mathrm{B})$$

Par suite $$\mathrm{M}\pi_{\mathrm{A}}(\alpha\mathrm{I}_n - \mathrm{B}) = 0$$

Comme M n'est pas nulle, il en résulte que $\pi_{\mathrm{A}}(\alpha\mathrm{I}_n - \mathrm{B})$ n'est pas inversible. Notant $\pi_{\mathrm{A}} = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})} (\mathrm{X} - \lambda)^{\alpha_\lambda}$, on a donc

$$\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})} ((\alpha - \lambda)\mathrm{I}_n - \mathrm{B})^{\alpha_\lambda} \text{ non inversible}$$

Ainsi, il existe $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})$ tel que $\det((\alpha - \lambda)\mathrm{I}_n - \mathrm{B}) = 0$ ce qui équivaut à dire

$$\exists \lambda \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A}) \quad | \quad \alpha - \lambda \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{B})$$

ce qui prouve que $\alpha \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A}) + \mathrm{Sp}\,(\mathrm{B})$. On conclut

$$\boxed{\mathrm{Sp}\,(\varphi) = \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A}) + \mathrm{Sp}\,(\mathrm{B})}$$

Variante : On peut procéder un peu différemment pour l'inclusion $\mathrm{Sp}\,(\varphi) \subset \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A}) + \mathrm{Sp}\,(\mathrm{B})$. Soit $\mathrm{M} \in \mathrm{E} \setminus \{0\}$ telle que $\varphi(\mathrm{M}) = \alpha\mathrm{M}$. On a

$$\varphi(\mathrm{M}) = \alpha\mathrm{M} \iff \mathrm{AM} = \mathrm{MC} \quad \text{avec} \quad \mathrm{C} = \alpha\mathrm{I}_n - \mathrm{B}$$

Notons $r = \mathrm{rg}\,\mathrm{M}$. En considérant des matrices équivalentes et par blocs (voir exercice 6 feuille 20), on montre que χ_{A} et χ_{C} ont un facteur commun de degré $r \geqslant 1$ ce qui implique une valeur propre commune λ pour A et C. Il existe $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ non nulle telle que $\mathrm{CX} = \lambda\mathrm{X}$, c'est-à-dire $(\alpha\mathrm{I}_n - \mathrm{B})\mathrm{X} = \lambda\mathrm{X}$ ou encore

$$\mathrm{BX} = (\alpha - \lambda)\mathrm{X}$$

Ainsi, on a $$\alpha = \underbrace{\lambda}_{\in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})} + \underbrace{\alpha - \lambda}_{\in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{B})}$$