ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Feuille d'exercices n°19

Dans ce qui suit, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exercice 1 (*)

Soit $\mathrm{E} = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $\sigma : \mathrm{E} \to \mathrm{E}, (u_n)_n \mapsto (u_{n+1})_n$. Déterminer les valeurs propres de σ.

Exercice 2 (**)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ avec $n \geqslant 2$ et φ définie sur E par $\varphi(\mathrm{M}) = \mathrm{M} + \mathrm{Tr}\,(\mathrm{M})\mathrm{I}_n$ pour $\mathrm{M} \in \mathrm{E}$. Déterminer les éléments propres de φ.

Exercice 3 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev et f, g dans $\mathscr{L}(\mathrm{E})$.

1. Montrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ ont les mêmes valeurs propres non nulles.
2. Si E est de dimension finie, établir
$$\mathrm{Sp}\,(f \circ g) = \mathrm{Sp}\,(g \circ f)$$
3. On choisit $\mathrm{E} = \mathbb{R}[\mathrm{X}]$, $f : \mathrm{P} \mapsto \mathrm{XP}$ et $g : \mathrm{P} \mapsto \mathrm{P}'$. Montrer que f, g sont dans $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ puis déterminer si zéro est valeur propre de $f \circ g$ et $g \circ f$. Qu'en déduit-on ?

Exercice 4 (**)

Pour $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on note $\|\mathrm{M}\| = \underset{i \in [\![1\,;\,n]\!]}{\mathrm{Sup}} \sum_{j=1}^{n} |m_{i,j}|$. Montrer
$$\forall \mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \qquad \mathrm{Sp}_{\,\mathbb{R}}(\mathrm{A}) \subset [\,-\|\mathrm{A}\|\,;\,\|\mathrm{A}\|\,]$$

Exercice 5 (**)

Soit n entier et $\mathrm{E} = \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$. Pour $\mathrm{P} \in \mathrm{E}$, on pose
$$\varphi(\mathrm{P}) = \mathrm{X}(\mathrm{X}-1)\mathrm{P}' - n\mathrm{XP}$$

1. Montrer que $\varphi \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$.
2. Établir que la famille $\mathscr{B} = (\mathrm{X}^k(\mathrm{X}-1)^{n-k})_{k \in [\![0\,;\,n]\!]}$ est une base de E et préciser $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}\varphi$.

Exercice 6 (*)

Soit n entier. On considère D l'endomorphisme de dérivation de $\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$. Déterminer π_{D}.

Exercice 7 (*)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Comparer χ_{A} avec $\chi_{\mathrm{A}^\top}$, π_{A} avec $\pi_{\mathrm{A}^\top}$.

Exercice 8 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev, $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$, P, Q dans $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ avec $\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q} = 1$ et $(\mathrm{PQ})(f) = 0$. Montrer

$$\mathrm{E} = \mathrm{Ker}\ \mathrm{P}(f) \oplus \mathrm{Im}\ \mathrm{P}(f)$$

Exercice 9 (*)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ avec $\mathrm{rg}\ \mathrm{A} = 1$. Déterminer χ_{A}.

Exercice 10 (**)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ avec $\mathrm{rg}\ \mathrm{A} = 1$. Déterminer π_{A}.

Exercice 11 (**)

Soient $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que

$$\mathrm{Sp}\,(\mathrm{A}) \cap \mathrm{Sp}\,(\mathrm{B}) = \varnothing \iff \chi_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$$

Exercice 12 (*)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $u \in \mathrm{GL}(\mathrm{E})$. Montrer que $u^{-1} \in \mathbb{K}[u]$.

Exercice 13 (**)

Calculer χ_{A} avec $\mathrm{A} = \left(a_{i,j}\right) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \neq j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 14 (**)

Calculer χ_{A} avec $\mathrm{A} = \left(a_{i,j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 1 \text{ ou } j = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 15 (**)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ avec n entier impair. Montrer que la matrice A admet une valeur propre réelle.