ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Feuille d'exercices n°20

Dans ce qui suit, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exercice 1 (**)

Soit E un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie et u, v dans $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ tels que $u \circ v = v \circ u$. Montrer que u et v admettent un vecteur propre commun.

Exercice 2 (**)

Soient A, B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On définit les matrices par blocs

$$\mathrm{U} = \left(\begin{array}{c|c} \lambda \mathrm{I}_n & \mathrm{A} \\ \hline \mathrm{B} & \mathrm{I}_n \end{array}\right) \quad \text{et} \quad \mathrm{V} = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_n & 0 \\ \hline -\mathrm{B} & \lambda \mathrm{I}_n \end{array}\right)$$

1. À l'aide des matrices U et V, établir $\chi_{\mathrm{AB}} = \chi_{\mathrm{BA}}$.
2. Montrer que $\chi_{\mathrm{A}\bar{\mathrm{A}}} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

Exercice 3 (**)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que χ_{A} divise π_{A}^n.

Exercice 4 (**)

Soit $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonale avec $\mathrm{M} = \mathrm{diag}(\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_r)$ et $\mathrm{A}_i \in \mathscr{M}_{m_i}(\mathbb{K})$ pour $i \in [\![1 \,;\, r]\!]$. Déterminer χ_{A} en fonction des χ_{A_i} et π_{A} en fonction des π_{A_i}.

Exercice 5 (**)

Soit u un endomorphisme de E un $\mathbb{K}$-ev admettant un polynôme minimal π_u et $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$.

1. Montrer $$\mathrm{P}(u) \in \mathrm{GL}(\mathrm{E}) \iff \mathrm{P} \wedge \pi_u = 1$$
2. Montrer que si $\mathrm{P}(u) \in \mathrm{GL}(\mathrm{E})$, alors $\mathrm{P}(u)^{-1} \in \mathbb{K}[u]$.

Exercice 6 (***)

Soit E un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie, f et g dans $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ tels que

$$f \circ g - g \circ f = f$$

Montrer que f est nilpotent et que f et g admettent au moins un vecteur propre commun.

Exercice 7 (***)

Soient A, B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1. On suppose qu'il existe $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ avec $\operatorname{rg} \mathrm{X} = r \geqslant 1$ tel que $\mathrm{AX} = \mathrm{XB}$. Montrer que χ_{A} et χ_{B} ont un facteur commun de degré r.
2. La réciproque est-elle vraie ?
3. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que, pour $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, l'équation $\mathrm{AX} - \mathrm{XB} = \mathrm{M}$ d'inconnue $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ admette une unique solution.

Exercice 8 (***)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si A admet une valeur propre complexe non réelle, alors il existe un plan vectoriel stable par A.

Exercice 9 (***)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ avec $n \geqslant 2$.

1. On suppose $\forall i \in [\![1 ; n]\!] \qquad |a_{i,i}| > \mathrm{R}_i \quad \text{avec} \quad \mathrm{R}_i = \sum_{j \in [\![1 ; n]\!] \smallsetminus \{i\}} |a_{i,j}|$

   Montrer que $\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

2. Pour $(a, \mathrm{R}) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}_+$, on note $\mathrm{D}_f(a, \mathrm{R}) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| \leqslant \mathrm{R}\}$. Montrer

$$\operatorname{Sp}(\mathrm{A}) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{D}_f(a_{i,i}, \mathrm{R}_i)$$

   Les ensembles $\mathrm{D}_f(a_{i,i}, \mathrm{R}_i)$ sont appelés *disques de Gerschgorin*.

Exercice 10 (***)

Soit $\mathrm{A} = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ avec $a_{i,j} > 0$ pour tout $(i, j) \in [\![1 ; n]\!]^2$ et vérifiant $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$.

1. Montrer que $1 \in \operatorname{Sp}(\mathrm{A})$.
2. Montrer que si $\lambda \in \operatorname{Sp}_{\mathbb{C}}(\mathrm{A})$, alors $|\lambda| \leqslant 1$.
3. Établir que si $\lambda \in \operatorname{Sp}_{\mathbb{C}}(\mathrm{A}) \cap \mathbb{U}$, alors $\lambda = 1$.