ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Feuille d'exercices n°21

Dans ce qui suit, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exercice 1 (**)

Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension $n \geqslant 2$ et $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. On suppose que E est le seul sev non nul stable par u.

1. L'endomorphisme u possède-t-il des valeurs propres ?
2. Montrer que pour tout $x \neq 0_{\mathrm{E}}$, la famille $\mathscr{L}_x = (x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x))$ est une base de E.
3. Déterminer $\mathrm{mat}_{\mathscr{L}_x} u$. Cette matrice dépend-elle du choix de $x \in \mathrm{E} \setminus \{0_{\mathrm{E}}\}$?

Indications : 1. Considérer une droite vectorielle stable par u.
2. Considérer $\mathrm{Vect}\,(\mathscr{L}_x)$.
3. Pour $y \in \mathrm{E} \setminus \{0_{\mathrm{E}}\}$, déterminer $u^n(y)$ en fonction des $u^k(y)$ avec $k \in [\![0\,;\, n-1]\!]$.

Exercice 2 (**)

Soit $\mathrm{E} = \{f \in \mathscr{C}^0([\,0\,;+\infty\,[\,,\mathbb{R}) \mid f(0) = 0\}$. On pose

$$\forall f \in \mathrm{E} \qquad \mathrm{T}(f)(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Justifier que E est un $\mathbb{R}$-ev et $\mathrm{T} \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$.
2. Déterminer les éléments propres de T.

Indications : 1. Pour $f \in \mathrm{E}$, vérifier la continuité de $\mathrm{T}(f)$ en zéro.
2. Soit λ réel et $f \in \mathrm{E} \setminus \{0\}$ tel que $\mathrm{T}(f) = \lambda f$. Dériver cette relation puis étudier la non nullité de f et sa continuité en 0.

Exercice 3 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$.

1. Soit $x \in \mathrm{E} \setminus \{0_{\mathrm{E}}\}$. Justifier qu'il existe un unique polynôme unitaire $\pi_{u,x} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ vérifiant $\pi_{u,x}(u)(x) = 0_{\mathrm{E}}$ et divisant tout polynôme $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ vérifiant $\mathrm{P}(u)(x) = 0_{\mathrm{E}}$.
2. On suppose $\pi_u = \mathrm{P}^r$ avec P irréductible et r entier non nul. Montrer qu'il $x \in \mathrm{E} \setminus \{0_{\mathrm{E}}\}$ tel que $\pi_{u,x} = \pi_u$.

Indications : 1. Pour $x \in \mathrm{E} \setminus \{0_{\mathrm{E}}\}$, considérer

$$\mathrm{I}_x = \{\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}] \mid \mathrm{P}(u)(x) = 0_{\mathrm{E}}\}$$

et vérifier qu'il s'agit d'un idéal de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$.
2. Observer que pour $x \in \mathrm{E} \setminus \{0_{\mathrm{E}}\}$, on a $\pi_{u,x} | \pi_u$ puis considérer π_{e_i} pour $i \in [\![1\,;\, n]\!]$ avec $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

Exercice 4 (***)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ avec $\operatorname{rg} \mathrm{A} = 2$. Déterminer une expression de χ_{A} en fonction de $\operatorname{Tr}(\mathrm{A})$ et $\operatorname{Tr}(\mathrm{A}^2)$.

Indications : Montrer que A est semblable à $\mathrm{M} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathrm{B} \\ \hline 0 & \mathrm{A}' \end{array}\right)$ avec $\mathrm{A}' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ puis calculer M^2 et A'^2.

Exercice 5 (***)

Soit E un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie, f et g dans $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ tels que

$$f \circ g - g \circ f \in \operatorname{Vect}(f, g)$$

Montrer que f et g admettent au moins un vecteur propre commun.

Indications : Notant $f \circ g - g \circ f = \alpha f + \beta g$ avec α, β complexes, traiter le cas avec $\alpha \neq 0$, $\beta = 0$ puis $\alpha = 0$ et $\beta \neq 0$ et enfin α et β non nuls. On pourra calculer $f \circ h - h \circ f$ avec $h = \alpha f + \beta g$.

Exercice 6 (**)

Soit u un endomorphisme de E un $\mathbb{K}$-ev admettant un polynôme minimal π_u et $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$.

1. Montrer $$\mathrm{P}(u) \in \mathrm{GL}(\mathrm{E}) \iff \mathrm{P} \wedge \pi_u = 1$$
2. Montrer que si $\mathrm{P}(u) \in \mathrm{GL}(\mathrm{E})$, alors $\mathrm{P}(u)^{-1} \in \mathbb{K}[u]$.

Indications : 1. Si $\mathrm{P} \wedge \pi_u = 1$, utiliser la relation de Bezout. Pour la réciproque, procéder par contraposée.

Exercice 7 (****)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathrm{E}^2$ et on pose $\varphi(\mathrm{M}) = \mathrm{AM} + \mathrm{MB}$ pour tout $\mathrm{M} \in \mathrm{E}$. Établir

$$\operatorname{Sp}(\varphi) = \operatorname{Sp}(\mathrm{A}) + \operatorname{Sp}(\mathrm{B})$$

Indications : Pour établir $\operatorname{Sp}(\mathrm{A}) + \operatorname{Sp}(\mathrm{B}) \subset \operatorname{Sp}(\varphi)$, considérer α et M matrice non nulle telle que $\varphi(\mathrm{M}) = \alpha \mathrm{M}$ puis observer $\mathrm{AM} = \mathrm{M}(\alpha \mathrm{I}_n - \mathrm{B})$ et en déduire $\mathrm{P}(\mathrm{A})\mathrm{M} = \mathrm{M}\,\mathrm{P}(\alpha \mathrm{I}_n - \mathrm{B})$ pour $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$. Considérer π_{A} et conclure.