ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025 17/10/2024

Devoir en temps libre n°5

Problème I

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{A} \in \mathrm{E}$ avec $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}) \neq 0$. On pose

$$\forall \mathrm{M} \in \mathrm{E} \qquad \varphi(\mathrm{M}) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{M})\mathrm{A} - \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A})\mathrm{M}$$

1. Justifier que $\varphi \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$.
2. Montrer que φ est diagonalisable puis calculer $\mathrm{Tr}\,(\varphi)$ et $\det(\varphi)$.

Problème II

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie égale à n et $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. On dit que l'endomorphisme u est *cyclique* s'il existe $x_0 \in \mathrm{E}$ tel $(x_0, u(x_0), \ldots, u^{n-1}(x_0))$ est une base de E. Une matrice $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est dite *compagne* si et seulement s'il existe des scalaires $a_0, \ldots, a_{n-1}$ tels que

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & \ldots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

1. Soit u nilpotent d'ordre de nilpotence égal à n. Montrer que u est cyclique.
2. Établir

$$u \text{ est cyclique} \iff \text{il existe } \mathscr{B} \text{ base de E telle que } \mathrm{mat}_{\mathscr{B}} u \text{ est compagne}$$

3. On suppose u cyclique.
   (a) Montrer que $(\mathrm{id}\,, u, \ldots, u^{n-1})$ est libre.
   (b) En déduire $\pi_u = \chi_u$.

Problème III

Questions préliminaires

(i) Dans E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, justifier que deux endomorphismes diagonalisables qui commutent admettent une même base de diagonalisation.

(ii) Pour $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, on note Z(E) l'ensemble des matrices de E qui commutent avec toute matrice de E. Établir

$$\mathrm{Z}(\mathrm{E}) = \mathrm{Vect}\,(\mathrm{I}_n)$$

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathrm{E}^2$. On pose

$$\forall \mathrm{M} \in \mathrm{E} \qquad \Phi(\mathrm{M}) = \mathrm{AM} + \mathrm{MB}$$

1. Justifier que $\Phi \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$.
2. On suppose A et B diagonalisables.
   (a) Soit $(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})^2$ tel que $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ et $\mathrm{Q}^{-1}\mathrm{BQ} = \mathrm{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n)$. On pose $\mathrm{M}_{i,j} = \mathrm{PE}_{i,j}\mathrm{Q}^{-1}$ pour $(i, j) \in [\![1\,;\, n]\!]^2$. Calculer $\Phi(\mathrm{M}_{i,j})$ pour $(i, j) \in [\![1\,;\, n]\!]^2$.
   (b) En déduire que Φ est diagonalisable.
3. On suppose désormais Φ diagonalisable.
   (a) Justifier qu'il existe dans E des matrices $\mathrm{D}_1, \mathrm{D}_2$ diagonalisables, N_1, N_2 nilpotentes telles que $\mathrm{A} = \mathrm{D}_1 + \mathrm{N}_1$, $\mathrm{B} = \mathrm{D}_2 + \mathrm{N}_2$ avec $\mathrm{D}_1\mathrm{N}_1 = \mathrm{N}_1\mathrm{D}_1$ et $\mathrm{D}_2\mathrm{N}_2 = \mathrm{N}_2\mathrm{D}_2$.

   On pose

   $$\forall \mathrm{M} \in \mathrm{E} \qquad \Phi_d(\mathrm{M}) = \mathrm{D}_1\mathrm{M} + \mathrm{MD}_2 \quad \text{et} \quad \Phi_n(\mathrm{M}) = \mathrm{N}_1\mathrm{M} + \mathrm{MN}_2$$

   (b) Établir que Φ_d est diagonalisable, Φ_n nilpotent avec $\Phi_d \circ \Phi_n = \Phi_n \circ \Phi_d$.
   (c) À l'aide des résultats préliminaires, montrer que Φ_n est diagonalisable.
   (d) En déduire $\mathrm{N}_1 = -\mathrm{N}_2$ et $\mathrm{N}_1 \in \mathrm{Z}(\mathrm{E})$.
   (e) Conclure que les matrices A et B sont diagonalisables.