Commentaires - Devoir en temps libre n°3

Problème I

1. Plutôt bien réussie. Quelques rédactions très lourdes et non concluantes alors qu'il y a une démarche naturelle très simple, calquant la condition nécessaire de convergence d'une série.

2, 3. Il faut rédiger le lien entre produit partiel et somme partielle pour établir

$$\prod(1 \pm u_n) \text{ converge} \iff \sum \ln(1 \pm u_n) \text{ converge}$$

puis citer le critère des équivalents en mentionnant le signe constant pour conclure que $\sum \ln(1 \pm u_n)$ et $\sum u_n$ sont de même nature. Plusieurs usages de notations dont le sens n'est pas définie comme $\ln\left(\prod \dots\right)$ *converge* ou emploi de ce mot « converge » de manière ambiguë alors que son sens diffère selon qu'on parle de produit infini ou de série. Plusieurs confusions avec invocation de « sommation de relation de comparaison », hors sujet ici. De nombreuses lourdeurs de rédaction sur ces questions, à reprendre.

Problème II

1. Tout le monde n'a pas réussi cette question ! C'est inacceptable ! Certains semblent d'ailleurs ne pas comprendre qu'il s'agit simplement ici d'établir la convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$.

2. Il suffit d'adapter ici la démarche vue en cours pour le calcul de la somme $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$. Certains ont permuté les symboles dans l'expression

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

La permutation d'une intégrale et d'une somme infinie n'est jamais gratuite : il faut invoquer un théorème que nous n'avons pas encore énoncé et qui, de toute façon, ne s'appliquerait pas ici.

Problème III

1. Tout le monde n'a pas réussi cette question traitée dans le cours ! Par ailleurs, établir $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$ ne suffit pas à répondre à la question (précision en $o(\ln(n))$ qui ne permet pas de répondre). Il faut aussi mentionner le lien suite/série téléscopique pour montrer que la démarche mise en œuvre est bien identifiée.

2. Question peu réussie. Il fallait procéder à une sommation des relations de comparaison en invoquant la convergence de la série à termes positifs $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ puis procéder à une comparaison

série/intégrale à rédiger ou à une comparaison à un terme téléscopique comme $\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k(k-1)}$ pour établir

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \int_n^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$$

Certains pensent, à tort, qu'un $\mathrm{o}(1)$ est un $\mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)$: il suffit de considérer $\frac{1}{\ln(n)}$ par exemple.

3. Question peu abordée. Et parmi ceux qui l'abordent, peu pensent à discuter de chacun des termes obtenus à savoir $(-1)^n \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$, $(-1)^n \frac{\gamma}{\sqrt{n}}$ et $\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$. Enfin, l'invocation du critère des séries alternées exigeait un effort pour le détail de la décroissance de $n \mapsto \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$ qui n'a lieu qu'à partir d'un certain rang. Il faut par ailleurs souligner que $\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ n'implique que la suite décroît à partir d'un certain rang (considérer la suite $\left(\frac{1+(-1)^n}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ par exemple).