ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

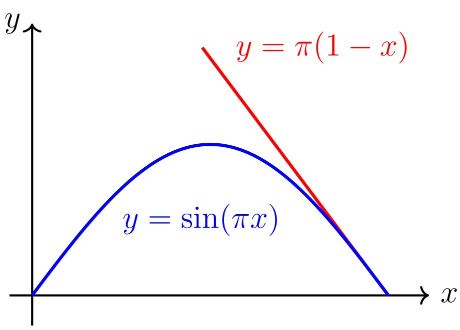
Feuille d'exercices n°10

Exercice 1 (*)

Établir $$\forall x \in [\,0\,;1\,] \qquad \sin(\pi x) \leqslant \pi(1-x)$$

Corrigé : La fonction $x \mapsto \sin(\pi x)$ est concave sur $[\,0\,;1\,]$ puisqu'elle est dérivable de dérivée $x \mapsto \pi\cos(\pi x)$ décroissante sur $[\,0\,;1\,]$. Ainsi, sa tangente en 1 est au dessus du graphe d'où

$$\boxed{\forall x \in [\,0\,;1\,] \qquad \sin(\pi x) \leqslant \pi(1-x)}$$



Exercice 2 (*)

Établir $$\forall x \in \left[\,0\,;\frac{\pi}{2}\,\right[\qquad x \leqslant \tan x$$

Corrigé : La fonction tan est dérivable sur $\left[\,0\,;\frac{\pi}{2}\,\right[$ et on a $\tan' = 1+\tan^2$ qui croît sur l'intervalle considéré. Ainsi, la fonction tan est convexe et considérant sa tangente en 0 qui est en dessous du graphe, il vient

$$\boxed{\forall x \in \left[\,0\,;\frac{\pi}{2}\,\right[\qquad \tan x \geqslant x}$$

Exercice 3 (*)

Soit $f \in \mathscr{C}^2(]\,0\,;+\infty\,[\,,\mathbb{R})$ et $g :]\,0\,;+\infty\,[\, \to \mathbb{R}, x \mapsto xf\left(\frac{1}{x}\right)$. Montrer que f est convexe si et seulement si g l'est.

Corrigé : La fonction g est de classe $\mathscr{C}^2$ comme composée de telles fonctions. Par dérivation, on trouve

$$\forall x > 0 \qquad g'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}f'\left(\frac{1}{x}\right) \qquad g''(x) = \frac{1}{x^3}f''\left(\frac{1}{x}\right)$$

d'où $$\forall x > 0 \qquad g''(x) = \frac{1}{x^3}f''\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{et} \quad f''(x) = \frac{1}{x^3}g''\left(\frac{1}{x}\right)$$

Comme $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ réalise une permutation de $]\,0\,;+\infty\,[$, les fonctions g'' et f'' sont de même signe et on conclut

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est convexe si et seulement si } g \text{ l'est.}}$$

Exercice 4 (*)

Que peut-on dire de la somme deux fonctions convexes ? de leur produit ?

Corrigé : Soit I intervalle de $\mathbb{R}$ et $f, g : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ deux fonctions convexes. Soient $(x, y) \in \mathrm{I}^2$ et $\lambda \in [\,0\,;1\,]$. On a

$$\begin{cases} f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \\ g(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda g(x) + (1-\lambda) g(y) \end{cases}$$

et sommant ces deux lignes, on obtient

$$(f+g)(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda (f+g)(x) + (1-\lambda)(f+g)(y)$$

ce qui prouve la convexité de $f+g$. En revanche, on ne peut rien dire concernant le produit. Par exemple, si on considère les fonctions convexes $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto x$, leur produit n'est ni convexe, ni concave. Si on impose que les fonctions soient positives, le résultat est toujours faux, par exemple en considérant $x \mapsto (x-1)^2$ et $x \mapsto (x+1)^2$ dont le produit est $x \mapsto x^4 - 2x^2 + 1$. Ainsi

$$\boxed{\text{Une somme de fonctions convexes est convexe mais on ne peut rien dire du produit.}}$$

Exercice 5 (*)

1. Une composée de fonctions convexes est-elle convexe ?
2. La composée d'une fonction croissante convexe avec une fonction convexe est-elle convexe ?

Corrigé : 1. Avec $f : x \mapsto -x$ et $g : x \mapsto x^2$, on a $f \circ g : x \mapsto -x^2$ non convexe.

$$\boxed{\text{Une composée de fonctions convexes n'est pas forcément convexe.}}$$

2. Soit $g : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ et $f : \mathrm{J} \to \mathbb{R}$ avec $\operatorname{Im} g \subset \mathrm{J}$, f et g convexes et f croissante. Pour $(x, y) \in \mathrm{I}^2$ et $\lambda \in [\,0\,;1\,]$, il vient par convexité de g

$$g(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda g(x) + (1-\lambda) g(y)$$

puis par croissance de f

$$f \circ g(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant f(\lambda g(x) + (1-\lambda) g(y))$$

et par convexité de f

$$f \circ g(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f \circ g(x) + (1-\lambda) f \circ g(y)$$

Ainsi

$$\boxed{\text{La composée d'une fonction croissante convexe avec une fonction convexe est convexe.}}$$

Exercice 6 (*)

Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, X une variable aléatoire réelle et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe.

Montrer
$$f(\mathbb{E}(\mathrm{X})) \leqslant \mathbb{E}(f(\mathrm{X}))$$

Corrigé : Comme $\sum\limits_{x \in \mathrm{X}(\Omega)} \mathbb{P}(\mathrm{X} = x) = 1$ et $\mathbb{P}(\mathrm{X} = x) \geqslant 0$ pour $x \in \mathrm{X}(\Omega)$, il vient d'après l'inégalité de Jensen

$$f(\mathbb{E}(\mathrm{X})) = f\left(\sum_{x \in \mathrm{X}(\Omega)} x \mathbb{P}(\mathrm{X} = x)\right) \leqslant \sum_{x \in \mathrm{X}(\Omega)} f(x) \mathbb{P}(\mathrm{X} = x)$$

Par transfert, on a $$\sum_{x\in \mathrm{X}(\Omega)} f(x)\mathbb{P}(\mathrm{X}=x)=\mathbb{E}(f(\mathrm{X}))$$

On conclut $$\boxed{f(\mathbb{E}(\mathrm{X}))\leqslant \mathbb{E}(f(\mathrm{X}))}$$

Exercice 7 (*)

Soit $f\in \mathscr{C}_{pm}([\,a\,;b\,],\mathbb{R})$, $g\in\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et g convexe. Montrer
$$g\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f\right)\leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b g\circ f$$

Corrigé : Soit n entier non nul. D'après l'inégalité de Jensen, on a
$$g\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\right)\leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n g\circ f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$$
Faisant tendre $n\to +\infty$, on obtient d'après le théorème de convergence des sommes de Riemann appliqué aux fonctions continues par morceaux f et $g\circ f$ et la continuité de g
$$\boxed{g\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f\right)\leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b g\circ f}$$

Exercice 8 (*)

Soient $x_1,\ldots,x_n\geqslant 0$. Montrer $$\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i}\geqslant \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n\sqrt{x_i}$$

Corrigé : La fonction $\sqrt{\cdot}$ est concave sur $\mathbb{R}_+$. D'après l'inégalité de Jensen, il vient
$$\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i}\geqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\sqrt{x_i}$$

On conclut $$\boxed{\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i}\geqslant \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n\sqrt{x_i}}$$

Exercice 9 (*)

Soit $\alpha\geqslant 1$. Établir $$\forall x\geqslant 0\qquad 1-x^\alpha\leqslant \alpha(1-x)$$

Corrigé : On pose $f(x)=1-x^\alpha$ pour $x\geqslant 0$. La fonction f est dérivable avec $f'(x)=-\alpha x^{\alpha-1}$ pour $x\geqslant 0$. La dérivée f' décroît et on en déduit la concavité de f sur $[\,0\,;+\infty\,[$. Par position graphe/tangente, on a
$$\forall x\geqslant 0\qquad f(x)\leqslant f'(1)(x-1)+f(1)$$

Et on conclut $$\boxed{\forall x\geqslant 0\qquad 1-x^\alpha\leqslant \alpha(1-x)}$$

Exercice 10 (*)

Soit E un $\mathbb{R}$-ev. Montrer qu'une intersection de parties de E convexes est convexe.

Corrigé : Soit $(\mathrm{C}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ une famille de convexes et $a, b \in \bigcap\limits_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{C}_i$. Pour $\lambda \in [\,0\,;1\,]$, on a

$$\forall i \in \mathrm{I} \qquad \lambda a + (1-\lambda)b \in \mathrm{C}_i$$

c'est-à-dire

$$\lambda a + (1-\lambda)b \in \bigcap_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{C}_i$$

Ainsi

$$\boxed{\text{Une intersection de convexes est un convexe.}}$$

Exercice 11 (**)

Soit $f \in \mathscr{C}^1([\,a\,;b\,], \mathbb{R})$ convexe. Montrer

$$(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

Corrigé : Par convexité, le graphe de f est sous la corde entre a et b et au-dessus de la tangente en $\dfrac{a+b}{2}$ d'où

$$\forall t \in [\,a\,;b\,] \qquad f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(t - \frac{a+b}{2}\right) + f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant f(t) \leqslant f(a) + \tau(a,b)(t-a)$$

On intègre et on obtient

$$\boxed{(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}}$$

Exercice 12 (**)

Établir

$$\forall x \in \left[\,0\,; \frac{\pi}{2}\,\right] \qquad 1 - \cos x \geqslant \frac{x^2}{\pi}$$

Corrigé : Par concavité, on a

$$\forall t \in \left[\,0\,; \frac{\pi}{2}\,\right] \qquad \sin t \geqslant \frac{2}{\pi} t$$

Après intégration, il vient

$$\forall x \in \left[\,0\,; \frac{\pi}{2}\,\right] \qquad \int_0^x \sin t\,\mathrm{d}t \geqslant \int_0^x \frac{2}{\pi} t\,\mathrm{d}t$$

D'où

$$\boxed{\forall x \in \left[\,0\,; \frac{\pi}{2}\,\right] \qquad 1 - \cos x \geqslant \frac{x^2}{\pi}}$$

Exercice 13 (**)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe majorée. Montrer que f est constante.
Le résultat subsiste-t-il pour $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$?

Corrigé : Supposons f non constante. Il existe $a < b$ tel $\tau(a,b) \neq 0$. Supposons $\tau(a,b) > 0$. Par croissance de $x \mapsto \tau(a,x)$, on trouve pour $x > b$

$$\tau(a,x) \geqslant \tau(a,b) \iff f(x) \geqslant f(a) + (x-a)\tau(a,b) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$

Supposons $\tau(a,b) < 0$. Par croissance de $x \mapsto \tau(a,x)$, on trouve pour $x < a$

$$\tau(a,x) \leqslant \tau(a,b) \iff f(x) \geqslant f(a) + (x-a)\tau(a,b) \xrightarrow[x\to-\infty]{} +\infty$$

Ainsi $$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est constante.}}$$

Le résultat est faux pour $f : [\,0\,;+\infty\,[\to \mathbb{R}$. On peut considérer $f : x \mapsto -x$ par exemple.

Exercice 14 (**)

Soit p entier non nul et $(u_n)_n$ suite de réels positifs telle que $\sum u_n$ converge. Montrer que la série $\sum \left(\prod_{i=0}^{p-1} u_{n+i}\right)^{\frac{1}{p}}$ converge.

Corrigé : Par concavité, on a

$$\ln\left(\prod_{i=0}^{p-1} u_{n+i}\right)^{\frac{1}{p}} = \frac{1}{p}\sum_{i=0}^{p-1} \ln u_{n+i} \leqslant \ln\left(\frac{1}{p}\sum_{i=0}^{p-1} u_{n+i}\right)$$

d'où $$\left(\prod_{i=0}^{p-1} u_{n+i}\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \frac{1}{p}\sum_{i=0}^{p-1} u_{n+i} = \frac{1}{p}\left[\mathrm{R}_{n-1} - \mathrm{R}_{n+p-1}\right]$$

et $$\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \frac{1}{p}\left[\mathrm{R}_{n-1} - \mathrm{R}_{n+p-1}\right] = \frac{1}{p}\left[\sum_{n=0}^{p-1} \mathrm{R}_{n-1} - \sum_{n=\mathrm{N}+1}^{\mathrm{N}+p} \mathrm{R}_{n-1}\right] \xrightarrow[\mathrm{N}\to+\infty]{} \frac{1}{p}\sum_{n=0}^{p-1} \mathrm{R}_{n-1}$$

Par comparaison pour des séries à termes positifs, on conclut

$$\boxed{\text{La série } \sum \left(\prod_{i=0}^{p-1} u_{n+i}\right)^{\frac{1}{p}} \text{ converge.}}$$