ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Feuille d'exercices n°11

Exercice 1 (****)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe dérivable.

1. Montrer que $g(x) = f(x) - xf'(x)$ admet une limite (finie ou infinie) pour $x \to +\infty$.
2. On suppose que g admet une limite finie p pour $x \to +\infty$. Montrer que $\dfrac{f(x)}{x}$ et $f'(x)$ admettent une même limite finie m pour $x \to +\infty$.
3. Montrer alors $$f(x) - mx - p \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$

Corrigé : 1. En supposant f deux fois dérivable, on trouve $g'(x) = -xf''(x) \leqslant 0$ pour $x \geqslant 0$. Montrons ce résultat avec les hypothèses du sujet. Soit $y > x \geqslant 0$. On a

$$g(y) - g(x) = \underbrace{f(y) + (x-y)f'(y) - f(x)}_{\leqslant 0} + x\underbrace{[f('(x) - f'(y)]}_{\leqslant 0}$$

La première inégalité résulte de la position graphe/tangente en y et la deuxième vient par croissance de f'.

On en déduit $$\forall y \geqslant x \geqslant 0 \qquad g(y) - g(x) \leqslant 0$$

Ainsi, la fonction g décroît sur $[\,0\,; +\infty\,[$ et d'après le théorème de limite monotone

$$\boxed{\text{La fonction } g \text{ admet une limite finie ou infinie en } +\infty.}$$

2. Posons $$\forall x > 0 \qquad \varphi(x) = \frac{f(x) - p}{x} \quad \text{et} \quad \psi(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x}$$

Par dérivation, on a

$$\forall x > 0 \qquad \varphi'(x) - \frac{1}{x^2}\,[f(x) - xf'(x) - p] = -\frac{g(x) - p}{x^2}$$

et $$\forall x > 0 \qquad \psi'(x) = -\frac{1}{x^2}\,[f(x) - xf'(x) - f(0)] = -\frac{g(x) - f(0)}{x^2}$$

La fonction g étant décroissante, on a $p \leqslant g(x) \leqslant g(0)$ pour tout $x \geqslant 0$ on en déduit

$$\forall x > 0 \qquad \varphi'(x) \leqslant 0 \quad \text{et} \quad \psi'(x) \geqslant 0$$

et on a également $$\forall x > 0 \qquad \psi(x) \leqslant \varphi(x)$$

Ainsi $$\forall x \geqslant 1 \qquad \psi(1) \leqslant \psi(x) \leqslant \varphi(x) \leqslant \varphi(1)$$

Par limite monotone, les fonctions φ et ψ admettent donc des limites finies en $+\infty$. Enfin, on a

$$\forall x > 0 \qquad \varphi(x) - \psi(x) = \frac{f(0) - p}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$

On en déduit que les fonctions φ et ψ admettent une même limite finie m en $+\infty$. Ainsi, on obtient pour $x > 0$

$$\frac{f(x)}{x} = \varphi(x) + \frac{p}{x} \underset{x \to +\infty}{=} m + \mathrm{o}(1) \quad \text{et} \quad f'(x) = \frac{f(x)}{x} - \frac{g(x)}{x} \underset{x \to +\infty}{=} m + \mathrm{o}(1) + \frac{p + \mathrm{o}(1)}{x}$$

On conclut

$$\boxed{\text{Les fonctions } \frac{f(x)}{x} \text{ et } f'(x) \text{ admettent une même limite finie } m \text{ pour } x \to +\infty.}$$

Remarque : On a mis en œuvre une version continue du résultat des suites adjacentes.

Variantes : (a) Avec des hypothèses un peu renforcées, on peut procéder différemment, sans l'introduction des fonctions φ et ψ qui n'est pas complètement évidente. Supposons $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

On pose $$\forall x > 0 \qquad h(x) = \frac{f(x)}{x}$$

La fonction h est dérivable sur $]\,0\,;+\infty\,[$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas et par dérivation

$$\forall x > 0 \qquad h'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

Par hypothèse, il existe $\mathrm{M} \geqslant 0$ et tel que $|g(x)| \leqslant \mathrm{M}$ pour $x \geqslant 1$. Par suite

$$\forall x \geqslant 1 \qquad |h(x) - h(1)| = \left| \int_1^x h'(t)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \int_1^x \frac{\mathrm{M}\mathrm{d}t}{t^2} \leqslant \mathrm{M}$$

Par conséquent, la fonction h n'admet pas de limite infinie en $+\infty$. Or, on a

$$g(x) \underset{+\infty}{=} \mathrm{O}(1) \implies h(x) - f'(x) = \frac{g(x)}{x} \underset{+\infty}{=} \mathrm{o}(1)$$

et comme f' croît par convexité de f, celle-ci admet une limite finie ou infinie en $+\infty$ d'après le théorème de limite monotone et de même pour h d'après l'égalité précédente. On retrouve alors le résultat attendu.

(b) On peut conserver l'idée du contrôle de h avec seulement l'hypothèse de dérivabilité de f en suivant un démarche discrétisée. Pour $x \geqslant 1$, on décompose

$$h(x) - h(1) = \sum_{k=1}^{\lfloor x \rfloor - 1} [h(k+1) - h(k)] + h(x) - h(\lfloor x \rfloor)$$

D'après l'inégalité des accroissements finis, on a

$$\forall k \geqslant 1 \qquad |h(k+1) - h(k)| \leqslant \frac{\mathrm{M}}{k^2} \quad \text{et} \quad \forall x \geqslant 1 \qquad |h(x) - h(\lfloor x \rfloor)| \leqslant \frac{\mathrm{M}}{\lfloor x \rfloor^2}$$

Ainsi $$\forall x \geqslant 1 \qquad |h(x) - h(1)| \leqslant \sum_{k=1}^{\lfloor x \rfloor} \frac{\mathrm{M}}{k^2} \underset{x \to +\infty}{=} \mathrm{O}(1)$$

On conclut comme précédemment.

3. La fonction φ décroît et $\varphi(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} m$ d'où $\varphi(x) \geqslant m$ pour tout $x > 0$ et par conséquent

$$\forall x > 0 \qquad f(x) - mx \geqslant p$$

Par ailleurs, comme f' croît et tend vers m en $+\infty$, on obtient

$$\forall x > 0 \qquad p \leqslant f(x) - mx \leqslant f(x) - xf'(x)$$

Par encadrement $$\boxed{f(x) - mx - p \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0}$$

Exercice 2 (***)

Soit $M_1 \ldots M_n$ (avec $n > 2$) un polygone inscrit dans le cercle unité avec M_1 de coordonnées $(1,0)$. Montrer que ce polygone est de périmètre maximal s'il est régulier.

Corrigé : Par des considérations géométriques, notant $\theta_k = \widehat{\overrightarrow{OM_k}, \overrightarrow{OM_{k+1}}}$ pour $k \in [\![1\,;\,n]\!]$ avec $M_{n+1} = M_1$, on obtient

$$\mathcal{P} = \sum_{k=1}^{n} 2\sin\left(\frac{\theta_k}{2}\right) \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=1}^{n} \theta_k = 2\pi$$

Par concavité de sin sur $[\,0\,;\pi\,]$, il vient

$$2n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\sin\left(\frac{\theta_k}{2}\right) \leqslant 2n\sin\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\theta_k}{2n}\right) = 2n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

Ainsi $\boxed{\text{Le polygone inscrit de périmètre maximal est régulier.}}$

Remarque : Avec la stricte concavité de sin sur $[\,0\,;\pi\,]$ (notion hors-programme), on peut montrer que le polygone est de périmètre maximal si et seulement s'il est régulier.

Exercice 3 (***)

Soit $f : \mathbb{R} \to \,]\,0\,;+\infty\,[$. Montrer

$$\ln\circ f \text{ convexe} \iff \forall \alpha > 0 \qquad f^{\alpha} \text{ convexe}$$

Corrigé : Supposons $\ln\circ f$ convexe. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in [\,0\,;1\,]$. On a

$$\ln f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda \ln f(x) + (1-\lambda)\ln f(y)$$

Ainsi, pour $\alpha > 0$, d'après la propriété fondamentale du logarithme, il vient après multiplication par α

$$\ln f^{\alpha}(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda \ln f^{\alpha}(x) + (1-\lambda)\ln f^{\alpha}(y)$$

Enfin, par concavité de ln, on trouve

$$\lambda \ln f^{\alpha}(x) + (1-\lambda)\ln f^{\alpha}(y) \leqslant \ln\left[\lambda f^{\alpha}(x) + (1-\lambda) f^{\alpha}(y)\right]$$

L'implication directe s'en déduit. Supposons f^{α} convexe pour tout $\alpha > 0$. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in [\,0\,;1\,]$. On a

$$f^{\alpha}(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f^{\alpha}(x) + (1-\lambda) f^{\alpha}(y)$$

Posons $\qquad \forall \alpha \geqslant 0 \qquad \varphi(\alpha) = \lambda f^{\alpha}(x) + (1-\lambda) f^{\alpha}(y) - f^{\alpha}(\lambda x + (1-\lambda)y)$

On a $\varphi(\alpha) \geqslant 0$ pour tout $\alpha \geqslant 0$ (le résultat vaut aussi pour $\alpha = 0$ puisque $\varphi(0) = 0$). Par dérivation, il vient

$$\forall \alpha \geqslant 0 \qquad \varphi'(\alpha) = \lambda f^{\alpha}(x)\ln f(x) + (1-\lambda) f^{\alpha}(y)\ln f(y) - f^{\alpha}(\lambda x + (1-\lambda)y)\ln f(\lambda x + (1-\lambda)y)$$

et en particulier $\quad \varphi'(0) = \lambda \ln f(x) + (1-\lambda)\ln f(y) - \ln f(\lambda x + (1-\lambda)y)$

Or, on a $$\varphi'(0) = \lim_{\alpha\to 0}\frac{\varphi(\alpha) - \varphi(0)}{\alpha - 0} \geqslant 0$$

On conclut $\boxed{\ln\circ f \text{ convexe} \iff \forall \alpha > 0 \qquad f^{\alpha} \text{ convexe}}$

Exercice 4 (***)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe. Montrer que f est continue.

Corrigé : Soient x_0, a, b réels tels que $a < x_0 < x < b$. D'après l'inégalité des pentes, on a

$$\tau(x_0, x) \leqslant \tau(x_0, b) \iff f(x) \leqslant f(x_0) + \tau(x_0, b)(x - x_0)$$

puis
$$\tau(a, x_0) \leqslant \tau(x_0, x) \iff f(x_0) + \tau(a, x_0)(x - x_0) \leqslant f(x)$$

Par encadrement
$$f(x) \xrightarrow[x \to x_0^+]{} f(x_0)$$

On fait de même pour $x \to x_0^-$. Ainsi

$$\boxed{f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})}$$

Exercice 5 (***)

Soit $x_1, \ldots, x_n$ des réels positifs.

1. Établir
$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} \leqslant \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

2. Montrer que cette inégalité est une égalité si et seulement si $x_1 = \ldots = x_n$.

Preuve : 1. L'inégalité est triviale si l'un des x_i est nul. Sinon, par concavité du ln, il vient d'après l'inégalité de Jensen

$$\ln \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln x_i \leqslant \ln \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \right)$$

Passant à l'exponentielle, on conclut

$$\boxed{\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} \leqslant \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i}$$

2. Le cas d'égalité est trivial si l'un des x_i est nul. Supposons les $x_i > 0$. Le sens indirect est immédiat. Supposons les x_i non tous égaux, par exemple $x_1 \neq x_2$ sans perte de généralité. On pose $y_1 = y_2 = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ puis $y_i = x_i$ pour $i \in [\![3\,;\, n]\!]$. On a

$$\prod_{i=1}^{n} x_i < \prod_{i=1}^{n} y_i \iff x_1 x_2 < \frac{(x_1 + x_2)^2}{4} \iff (x_1 - x_2)^2 > 0$$

ce qui est vrai. Supposons $\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$. En observant $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i$, il vient

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} < \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} y_i} \leqslant \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

ce qui est absurde. On conclut

$$\boxed{\text{L'inégalité arithmético-géométrique est une égalité si et seulement si } x_1 = \ldots = x_n.}$$

Exercice 6 (****)

Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ vérifiant

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

Montrer que f est convexe.

Corrigé : Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On note

$$\forall n \in \qquad \mathrm{D}_n = \left\{\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{2^k}, (x_k)_{k\in[\![1\,;\,n]\!]} \in \{0,1\}^n\right\} \cup \{1\} \quad \text{et} \quad \mathrm{D} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{D}_n$$

Avec la convention $\sum\limits_{k=1}^{0} \ldots = 0$, on a en particulier $\mathrm{D}_0 = \{0,1\}$. On note

$$\mathscr{P}(n) : \qquad \forall \lambda \in \mathrm{D}_n \qquad f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leqslant \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)$$

Montrons par récurrence que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout n entier non nul.

• Initialisation : Par calcul direct, on a

$$\forall \lambda \in \mathrm{D}_0 = \{0,1\} \qquad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

• Hérédité : Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie avec n entier fixé. Considérons $\lambda \in \mathrm{D}_{n+1} \smallsetminus \{1\}$ (la cas $\lambda = 1$ est immédiat). On note

$$\lambda = \frac{x_1 + \alpha}{2} \quad \text{avec} \quad x_1 \in \{0,1\} \quad \text{et} \quad \alpha = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_{k+1}}{2^k} \quad \text{et} \quad (x_k)_{k\in[\![2\,;\,n+1]\!]} \in \{0,1\}^n$$

On a

$$\begin{aligned}
f(\lambda a + (1-\lambda)b) &= f\left(\frac{x_1 a + (1-x_1)b}{2} + \frac{\alpha a + (1-\alpha)b}{2}\right) \\
&\leqslant \frac{1}{2}\left[f(x_1 a + (1-x_1)b) + f(\alpha a + (1-\alpha)b)\right] \\
f(\lambda a + (1-\lambda)b) &\leqslant \frac{1}{2}\left[x_1 f(a) + (1-x_1) f(b) + \alpha f(a) + (1-\alpha) f(b)\right]
\end{aligned}$$

d'après l'hypothèse de récurrence et le cas trivial $x_1 \in \{0,1\}$. Ainsi

$$f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leqslant \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)$$

ce qui clôt la récurrence. On a donc

$$\forall \lambda \in \mathrm{D} \qquad f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leqslant \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)$$

Soit $\lambda \in [\,0\,;1\,]$. On pose $\qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \lambda_n = \dfrac{\lfloor 2^n \lambda \rfloor}{2^n}$

On a $\qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \dfrac{2^n\lambda - 1}{2^n} \leqslant \lambda_n \leqslant \dfrac{2^n \lambda}{2^n} = \lambda$

Ainsi, par encadrement $\qquad (\lambda_n)_n \in \mathrm{D}^{\mathbb{N}} \quad \text{et} \quad \lambda_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda$

Par continuité, on passe à la limite dans

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad f(\lambda_n a + (1-\lambda_n)b) \leqslant \lambda_n f(a) + (1-\lambda_n) f(b)$$

et on conclut $\qquad \boxed{\text{La fonction } f \text{ est convexe.}}$

Première variante : On peut aussi le rédiger sans détailler l'écriture binaire fractionnaire avec

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{D}_n = \left\{ \frac{p}{2^n}, p \in [\![\, 0\,;\, 2^n \,]\!] \right\}$$

L'initialisation est identique. Détaillons l'hérédité. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie pour n entier fixé. Soit $\lambda \in \mathrm{D}_{n+1}$. On a $\lambda = \dfrac{p}{2^{n+1}}$ avec $p \in [\![\, 0\,;\, 2^{n+1} \,]\!]$. Si p est pair, notant $p = 2q$ avec $q \in [\![\, 0\,;\, 2^n \,]\!]$, on a $\lambda = \dfrac{q}{2^n} \in \mathrm{D}_n$ et par hypothèse de récurrence, il s'ensuit

$$f(\lambda a + (1-\lambda) b) \leqslant \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)$$

Si p est impair, notant $p = 2q+1$ avec $q+1 \in \mathrm{D}_n$ car $q < 2^n$, on a

$$\begin{aligned} f(\lambda a + (1-\lambda) b) &= f\left(\frac{1}{2} \left(\frac{q}{2^n} a + \left(1 - \frac{q}{2^n}\right) b \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{q+1}{2^n} a + \left(1 - \frac{q+1}{2^n}\right) b \right) \right) \\ &\leqslant \frac{1}{2} \left[f\left(\frac{q}{2^n} a + \left(1 - \frac{q}{2^n}\right) b \right) + f\left(\frac{q+1}{2^n} a + \left(1 - \frac{q+1}{2^n}\right) b \right) \right] \end{aligned}$$

Avec l'hypothèse de récurrence, le résultat suit.

Deuxième variante : Par l'absurde, supposons f non convexe. Ainsi, il existe $a < b$ et $c \in \,]\, a\,; b\,[$ tel que $(c, f(c))$ soit au dessus de la corde entre a et b. Posons

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \varphi(x) = f(x) - f(a) - \tau(a,b)(x-a)$$

La fonction φ vérifie clairement la même inégalité que f et on a

$$\varphi(a) = \varphi(b) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi(c) > 0$$

L'ensemble $\mathrm{I} = \{ u \in [\, a\,; c\,] \mid \varphi(u) = 0 \}$ est non vide majoré donc admet une borne supérieure α. Par caractérisation séquentielle, il existe $(\alpha_n)_n \in \mathrm{I}^{\mathbb{N}}$ telle que $\alpha_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha$. Par continuité de φ, on a

$$0 = \varphi(\alpha_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi(\alpha) = 0$$

ce qui prouve que $\alpha \in \mathrm{I}$. De même, l'ensemble $\mathrm{J} = \{ u \in [\, c\,; b\,] \mid \varphi(u) = 0 \}$ admet une borne inférieure atteinte donc un minimum β et on a

$$\forall x \in \,]\, \alpha\,; c\,] \qquad \varphi(x) > 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in [\, c\,; \beta\,[\qquad \varphi(x) > 0$$

En particulier $\qquad \varphi\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2} \right) > 0 \quad \text{et} \quad \varphi\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2} \right) \leqslant \dfrac{\varphi(\alpha) + \varphi(\beta)}{2} = 0$

ce qui est absurde. On conclut que f est convexe.

Exercice 7 (Hölder, Minkowski ****)

Soient $p, q > 1$ tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, I un intervalle et f, g continues sur I, positives.

1. Soient $a, b \geqslant 0$. Montrer

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

2. On suppose f^p et g^q intégrables sur I. Montrer que fg est intégrable sur I et

$$\int_{\mathrm{I}} fg \leqslant \left(\int_{\mathrm{I}} f^p \right)^{1/p} \left(\int_{\mathrm{I}} g^q \right)^{1/q}$$

3. On suppose f^p et g^p intégrables sur I. Montrer que $(f+g)^p$ est intégrable sur I et

$$\left(\int_{\mathrm{I}} (f+g)^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\int_{\mathrm{I}} f^p\right)^{1/p} + \left(\int_{\mathrm{I}} g^p\right)^{1/p}$$

Corrigé : 1. L'inégalité est triviale si a ou b est nul. La fonction ln est concave sur $]\,0\,;+\infty\,[$

$$\ln\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right) \geqslant \frac{1}{p}\ln a^p + \frac{1}{q}\ln b^q = \ln ab$$

Par croissance de l'exponentielle, il vient

$$\boxed{\forall a, b \geqslant 0 \qquad ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}}$$

Remarque : Il s'agit de l'*inégalité de Young*.

2. On suppose f, g non identiquement nulles sinon l'inégalité est triviale. Par séparation de l'intégrale, on a $\displaystyle\int_{\mathrm{I}} f^p > 0$ et $\displaystyle\int_{\mathrm{I}} g^q > 0$. On pose

$$u = \frac{f}{\left(\displaystyle\int_{\mathrm{I}} f^p\right)^{1/p}} \quad \text{et} \quad v = \frac{g}{\left(\displaystyle\int_{\mathrm{I}} g^q\right)^{1/q}}$$

Ainsi
$$0 \leqslant uv \leqslant \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}$$

On en déduit l'intégrabilité de uv puis après intégration

$$\int_{\mathrm{I}} uv \leqslant \frac{1}{p}\int_{\mathrm{I}} u^p + \frac{1}{q}\int_{\mathrm{I}} v^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Autrement dit
$$\boxed{\int_{\mathrm{I}} fg \leqslant \left(\int_{\mathrm{I}} f^p\right)^{1/p}\left(\int_{\mathrm{I}} g^q\right)^{1/q}}$$

Remarque : Il s'agit de l'*inégalité de Hölder*. Celle-ci généralise l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

3. Par convexité de $t \mapsto t^p$ sur $[\,0\,;+\infty\,[$ (de dérivée $t \mapsto pt^{p-1}$ croissante), on a

$$\left(\frac{f+g}{2}\right)^p \leqslant \frac{f^p + g^p}{2}$$

d'où l'intégrabilité de $(f+g)^p$ sur I. On suppose $\displaystyle\int_{\mathrm{I}} (f+g)^p > 0$ sans quoi le résultat est immédiat. On écrit

$$(f+g)^p = (f+g)(f+g)^{p-1} = f(f+g)^{p-1} + g(f+g)^{p-1}$$

et on remarque
$$(f+g)^{(p-1)q} = (f+g)^p$$

Ainsi, d'après l'inégalité précédente appliquée deux fois, on obtient

$$\int_{\mathrm{I}} (f+g)^p \leqslant \left(\int_{\mathrm{I}} f^p\right)^{1/p}\left(\int_{\mathrm{I}} (f+g)^p\right)^{1/q} + \left(\int_{\mathrm{I}} g^p\right)^{1/p}\left(\int_{\mathrm{I}} (f+g)^p\right)^{1/q}$$

Avec $\dfrac{1}{q} = 1 - \dfrac{1}{p}$, on conclut

$$\boxed{\left(\int_{\mathrm{I}}(f+g)^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\int_{\mathrm{I}} f^p\right)^{1/p} + \left(\int_{\mathrm{I}} g^p\right)^{1/p}}$$

Remarque : Il s'agit de l'*inégalité de Minkowski*.