

## DM 4 de Physique à rendre le vendredi 11/10/24

# Observation de la structure fine de la raie de Balmer $H_\alpha$ de l'atome d'hydrogène

*On traitera les questions dans l'ordre de cet énoncé, donc d'abord la partie V (interféromètre de Michelson) qui est indépendante des parties précédentes (hors contexte historique). On conseille une première lecture rapide de l'ensemble du sujet avant de démarrer pour situer le contexte scientifique historique.*

Dans ce sujet, on propose d'étudier quelques étapes clés de l'étude des niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène.

Le problème est constitué de 7 parties, quasiment indépendantes, même s'il y a un fil conducteur entre elles. Il est conseillé au candidat de faire une première lecture rapide du sujet afin d'en retirer une vue d'ensemble. Les paragraphes rédigés en italique donnent des explications permettant de situer chaque partie dans son contexte scientifique historique, avec leurs hypothèses d'étude.

Les constantes fondamentales intervenant dans le problème sont rappelées ci-dessous avec leurs valeurs numériques données avec 5 chiffres significatifs :

- charge élémentaire :  $e = 1,6022 \cdot 10^{-19}$  C
- charge de l'électron :  $-e$
- charge du proton :  $+e$
- masse de l'électron :  $m_e = 9,1094 \cdot 10^{-31}$  kg
- masse du proton :  $m_p = 1,6726 \cdot 10^{-27}$  kg
- rayon de Bohr :  $a_B = 5,2919 \cdot 10^{-11}$  m
- vitesse de la lumière dans le vide :  $c = 2,9979 \cdot 10^8$  m.s<sup>-1</sup>
- perméabilité magnétique du vide :  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  H.m<sup>-1</sup>
- permittivité diélectrique du vide :  $\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2} = 8,8542 \cdot 10^{-12}$  F.m<sup>-1</sup>
- constante de Planck :  $h = 6,6261 \cdot 10^{-34}$  J.s
- constante de Planck réduite :  $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,0546 \cdot 10^{-34}$  J.s (notée plutôt  $\hbar$  habituellement)
- constante énergétique de Rydberg :  $R_y = \frac{m_e}{2\hbar} \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 = 2,1799 \cdot 10^{-18}$  J
- l'électron-volt, unité d'énergie :  $1 \text{ eV} = 1,6022 \cdot 10^{-19}$  J

Même si elles ne sont pas systématiquement rappelées dans l'énoncé, le candidat utilisera à son initiative dans cette liste toute constante qu'il jugera nécessaire pour répondre aux questions posées.

**Les applications numériques demandées seront réalisées avec 5 chiffres significatifs pour les questions Q1 à Q19, et avec 3 chiffres significatifs pour les questions Q20 à Q29.**

Le modèle de Bohr (étudié dans la partie I) est le premier modèle qui a permis de prévoir le spectre d'émission de l'hydrogène. Ce spectre contient en particulier la série de Balmer dont la première raie est la raie  $H_\alpha$ .

Mais les progrès de la spectroscopie ont rapidement conduit à observer que certaines raies vues initialement comme monochromatiques présentaient en fait une structure fine sous la forme de multiplets de raies voisines. C'est le cas, par exemple, de la raie  $H_\alpha$  qui fut observée comme un doublet par Michelson et Morley dès 1887, mais qui, plus tard, se révélera être formée de raies plus nombreuses.

Immédiatement après l'annonce du résultat négatif de leur expérience consacrée à confirmer l'existence de l'éther luminifère, Michelson et Morley mentionnèrent dans une publication l'observation de la raie de Balmer  $H_\alpha$  comme un doublet de nombre d'onde moyen

$$\sigma_m = 15\,237,40 \text{ cm}^{-1} \text{ et d'écart spectral } \Delta\sigma_{\text{exp}} = 0,360 \text{ cm}^{-1} \text{ (valeurs expérimentales de 1887).}$$

On rappelle que le nombre d'onde  $\sigma$  d'une radiation est l'inverse de sa longueur d'onde.

**Q20.** De quelle couleur est ce doublet ? Calculer son écart relatif en nombre d'onde  $\Delta\sigma_{\text{exp}} / \sigma_m$ .

Comparer cet écart relatif à celui du doublet jaune du sodium ( $\lambda_1 = 589,0 \text{ nm}$  et  $\lambda_2 = 589,6 \text{ nm}$ ).

## Partie V – Résolution interférométrique d'un doublet spectral

Les moyens spectroscopiques conventionnels (spectroscopie à prisme ou à réseau) peuvent se révéler insuffisants quand il s'agit de résoudre un doublet à très faible écart spectral. On peut alors avoir recours à des méthodes interférométriques. Il est question dans cette partie de l'utilisation de l'interféromètre de Michelson.

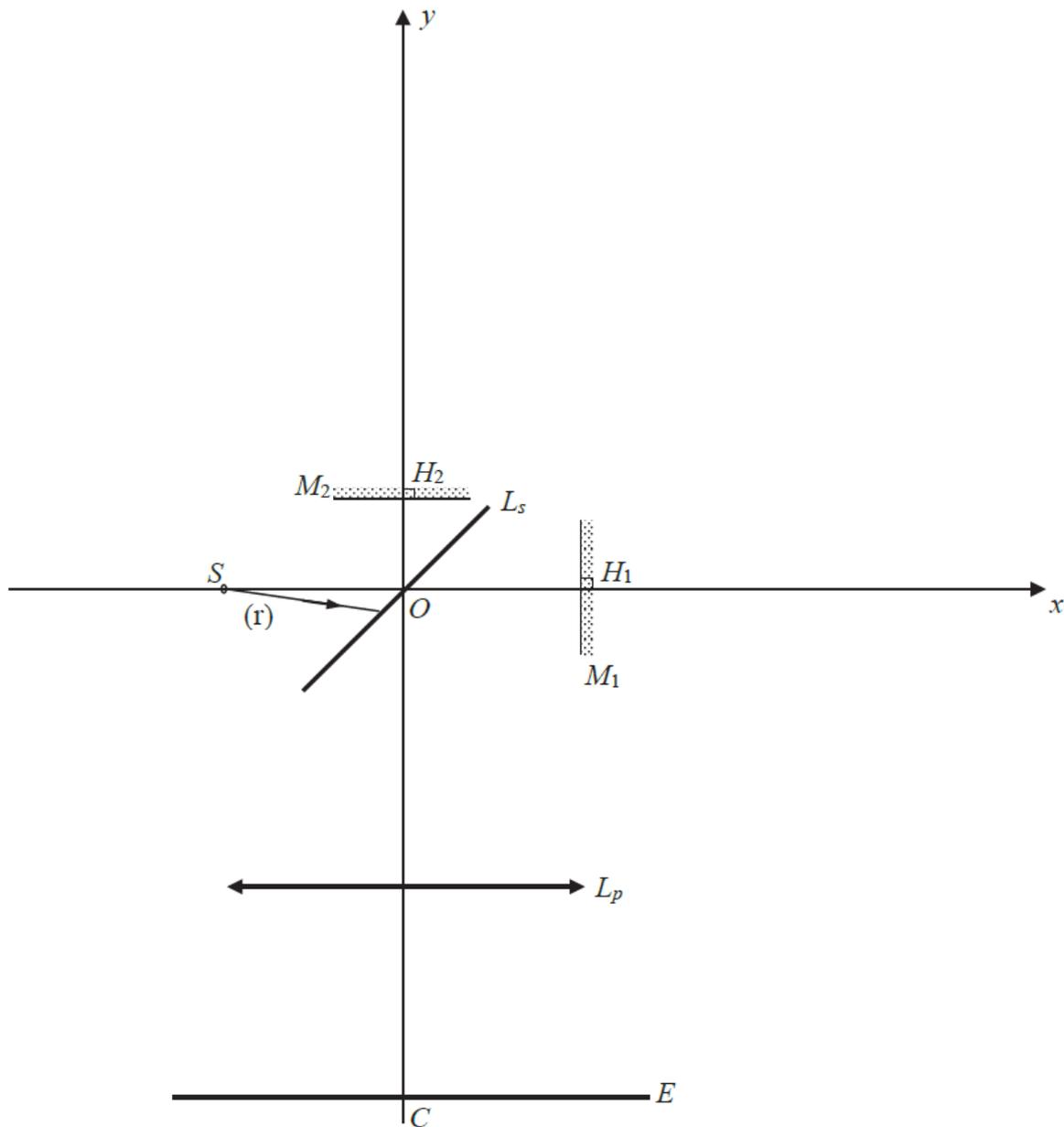
Le schéma 1 de principe d'un interféromètre de Michelson réglé en lame d'air est donné page 3. On note  $Ox$  et  $Oy$  deux axes perpendiculaires définissant les directions des deux bras de l'interféromètre.  $S$  est une source lumineuse ponctuelle située sur  $Ox$ .  $M_1$  et  $M_2$  sont deux miroirs plans parfaitement réfléchissants, disposés perpendiculairement à  $Ox$  en  $H_1$  et respectivement à  $Oy$  en  $H_2$ . Le trait incliné à  $45^\circ$ , noté  $L_s$ , schématise un groupe de deux lames semi-réfléchissantes à faces parallèles. Ce groupe est supposé n'introduire aucune différence de marche sur les trajets lumineux.  $L_p$  désigne une lentille mince convergente placée à la sortie de l'interféromètre de manière à ce que son axe optique soit confondu avec l'axe  $Oy$ . Un écran  $E$  est placé dans le plan focal image de  $L_p$ . On note  $C$  le foyer image de  $L_p$ .

**Q21.** Nommer les lames qui composent  $L_s$ . Qu'est-ce qui les distingue ? Expliquer la nécessité pratique d'utiliser deux lames.

**Q22.** Un rayon lumineux, noté  $(r)$ , émis par  $S$ , a été représenté. Reproduire le schéma ci-dessous sur la copie avec  $SO = OH_1 = 2 OH_2$  et le compléter en faisant un tracé soigné des deux rayons  $(r_1)$  et  $(r_2)$  qui émergent de l'interféromètre après division de  $(r)$ . On laissera apparent tout élément de construction (traits, prolongements de rayons, points remarquables, etc.) justifiant d'un tracé raisonné sans utilisation d'aucun rapporteur d'angle. Tout élément explicatif (noms, positions des points, constructions réalisées...) sera également mentionné.

**Q23.** Sur ce même schéma positionner le miroir fictif  $M'_1$  justifiant de la dénomination « lame d'air » en faisant apparaître le point  $Q_1$  intersection de  $M'_1$  avec les deux prolongements fictifs ad hoc de  $(r_1)$  et  $(r_2)$ .

Enfin, terminer le tracé des rayons  $(r_1)$  et  $(r_2)$  après la lentille  $L_p$  jusqu'à l'écran  $E$  (on demande comme ci-dessus un tracé raisonné).

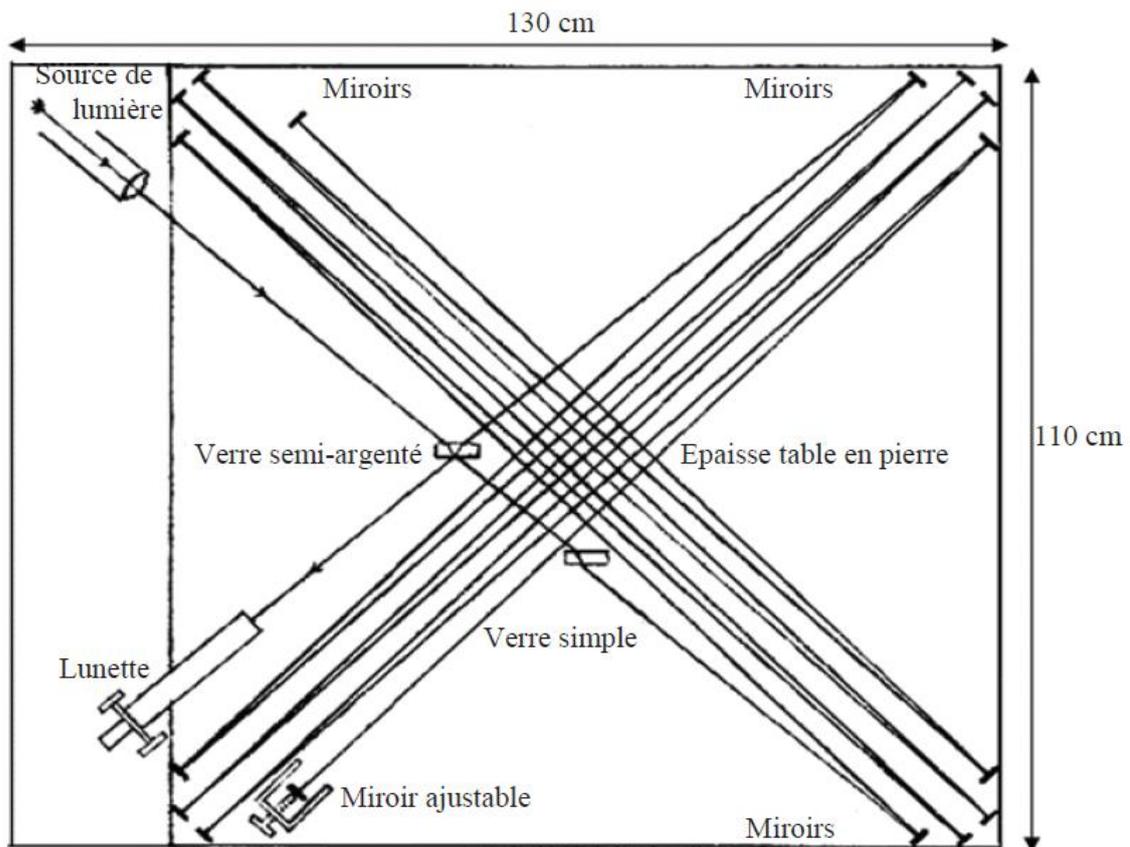


**Schéma 1** – Interféromètre de Michelson

- Q24.** Indiquer quelle est la forme des franges d'interférences observées sur l'écran (aucune justification n'est demandée). Comment nomme-t-on ces franges ?
- Q25.** En appelant  $e$  l'épaisseur de la lame d'air et en prenant l'indice optique de l'air égal à 1, exprimer la différence de marche  $\delta$  au centre  $C$  de l'écran.
- Q26.** On étudie le cas où la source de lumière utilisée présente un doublet spectral de nombres d'ondes  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ . Donner l'expression des ordres d'interférence  $p_1$  et  $p_2$  en  $C$  pour chaque radiation du doublet en fonction de  $\delta$ ,  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ .
- Q27.** Pour quelles valeurs de la différence  $p_1 - p_2$  y-a-t-il brouillage en  $C$  ?  
 En pratique la totalité de la figure d'interférences est affectée et on perd la visibilité des franges partout sur l'écran. En déduire, en fonction de l'écart spectral  $\Delta\sigma = \sigma_1 - \sigma_2$ , la variation  $D_\delta$  de la différence de marche entre deux situations consécutives de brouillage.  
 Comment nomme-t-on ces situations ?

Application numérique : dans le cas du doublet  $H_\alpha$  (écart spectral  $\Delta\sigma_{\text{exp}} = 0,360 \text{ cm}^{-1}$ ), calculer la variation  $D_e$  de l'épaisseur de la lame d'air pour passer d'une situation de brouillage à la situation de

brouillage directement consécutive.



**Figure 3** – Schéma des trajets lumineux dans l'interféromètre de Michelson et Morley de 1887  
(source : [http://ondes-relativite.info/DominiqueCabala/chap4\\_histo.htm](http://ondes-relativite.info/DominiqueCabala/chap4_histo.htm))

**Q28.** À l'entrée de leur interféromètre historique de 1887, Michelson et Morley ont utilisé un dispositif à prismes muni d'une fente pour sélectionner la raie  $H_\alpha$  présente dans le spectre solaire. Ils ont observé des brouillages périodiques lors de la translation du miroir mobile de leur interféromètre. Partant du contact optique (bras de longueurs rigoureusement égales à  $L_0$ ), ils ont compté un total de 6 brouillages de part et d'autre du contact optique (3 de chaque côté) pour un déplacement du miroir égal à  $1/160^\circ$  de la longueur  $L_0$ .  
Calculer la valeur de  $L_0$  pour l'interféromètre de Michelson de 1887.

**Q29.** L'interféromètre, construit dans un sous-sol du campus de l'Université de Cleveland aux Etats-Unis, était monté sur une table en granite rectangulaire posée sur un cylindre de bois flottant dans du mercure.

La table faisait environ 130 cm×110 cm de cotés. La longueur  $L_0$  des bras de l'interféromètre était synthétisée grâce à deux groupes de miroirs permettant plusieurs allers-retours du faisceau sur chaque voie, comme représenté sur la figure 3.

À partir de la **figure 3**, donner, en expliquant votre calcul, une estimation grossière de la longueur d'un bras de l'interféromètre. L'ordre de grandeur obtenu est-il en accord avec la valeur  $L_0$  trouvée à la question **Q28** ?

## Partie I – Modèle historique de Bohr de l'atome d'hydrogène (1913)

Dans le modèle planétaire de Bohr de l'atome d'hydrogène, l'électron (vu comme ponctuel en M) tourne autour de son proton (lui aussi ponctuel et supposé immobile en O) en décrivant une orbite circulaire de rayon  $r = OM$  (figure 1). On note  $\vec{u}_z$  le vecteur unitaire normal au plan de l'orbite.

L'électron est repéré par ses coordonnées polaires  $(r, \theta)$  comme indiqué sur la **figure 1** et  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$  est la base locale correspondante.

On néglige l'interaction gravitationnelle entre l'électron et le proton.

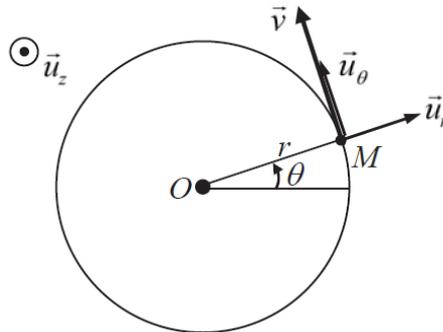


Figure 1 – Trajectoire circulaire de l'électron autour du proton supposé immobile

- Q1.** Rappel l'expression de la force électrique exercée par le proton sur l'électron.
- Q2.** Par l'application du théorème de la quantité de mouvement, déduire la norme  $v$  de la vitesse de l'électron en fonction entre autres du rayon  $r$  de l'orbite.
- Q3.** Rappel l'expression de l'énergie potentielle électrostatique  $E_p$  de l'électron. Montrer que l'énergie cinétique  $E_c$  de l'électron vérifie :  $E_c = -E_p / 2$ .
- Q4.** Exprimer la norme  $L$  du moment cinétique en  $O$  de l'électron en fonction de  $r$ ,  $m_e$ ,  $e$ , et  $\varepsilon_0$ .

*En 1913, Bohr a postulé que  $L$  est un multiple entier de  $\hbar$  en posant  $L = n\hbar$ , où  $n$  est un entier naturel strictement positif et où  $\hbar$  est la constante de Planck réduite (notée plutôt  $\hbar$  habituellement). Pour de tels états du modèle de Bohr, dits stationnaires, l'électron, en mouvement circulaire uniforme, bien qu'accélééré, ne rayonne pas d'énergie.*

- Q5.** De l'égalité  $L = n\hbar$ , déduire que la relation de quantification du rayon  $r_n$  de l'orbite caractérisée par l'entier  $n$  s'écrit sous la forme  $r_n = a_B n^2$  avec  $a_B$  le rayon de Bohr, qu'on exprimera en fonction de  $m_e$ ,  $e$ ,  $\varepsilon_0$  et  $\hbar$ .

- Q6.** En déduire que l'énergie mécanique  $E_n$  de l'électron vaut  $E_n = -\frac{R_y}{n^2}$  avec  $R_y$  la constante énergétique de Rydberg.

- Q7.** Quelle est la signification du rayon de Bohr ?  
Donner la valeur de  $a_B$  en picomètres et celle de  $R_y$  en électron-volts.

- Q8.** Donner la vitesse  $v_n$  de l'électron sur l'orbite caractérisée par l'entier  $n$ . On l'exprimera en fonction de  $n$ ,  $R_y$  et  $m_e$ .

Donner la valeur numérique de  $v_1$ . Le mouvement de l'électron vous semble-t-il relativiste ? Justifier.

### Partie III – Spectre de raies de l'hydrogène

Cette partie n'est pas indépendante des précédentes.

On rappelle que l'émission de lumière par un atome est due aux transitions entre deux états stationnaires (stationnaires au sens de Bohr (**partie I**)).

**Q13.** Quelle est l'énergie du photon émis lors de la transition entre un état atomique d'énergie  $E_{sup}$  vers un état d'énergie plus faible  $E_{inf}$ ?

Montrer dans le cas de l'atome d'hydrogène que la longueur d'onde  $\lambda_{n,n'}$  de la raie d'émission correspondant à la transition de l'état d'énergie  $E_n$  vers l'état d'énergie  $E_{n'}$  (avec  $n' < n$ ) vérifie la

relation de Ritz  $\frac{1}{\lambda_{n,n'}} = R_H \left( \frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right)$ . On explicitera la constante  $R_H$  en fonction de  $R_y$ ,  $h$  et  $c$ .

**Q14.** Calculer les valeurs numériques des longueurs d'onde des quatre premières raies d'émission de la série de Balmer prédites par la formule de Ritz, c'est-à-dire les raies correspondant aux transitions des états  $n = 3, 4, 5, 6$  vers l'état  $n' = 2$  (représentées et nommées dans la partie gauche de la **figure 2** de la **partie IV**).

Le **tableau 1** ci-dessous indique les valeurs expérimentales établies en 1885.

Recopiez ce tableau sur votre copie en le complétant par les valeurs numériques précédemment calculées.

Les intervalles d'incertitudes expérimentales englobent-ils les valeurs de Ritz ?

Nom de la raie	H $\alpha$	H $\beta$	H $\gamma$	H $\delta$
$\lambda_{\text{Ritz}}$				
$\lambda_{\text{exp}}$ (valeurs de 1885)	656,3 nm $\pm$ 0,3 nm	486,1 nm $\pm$ 0,2 nm	434,0 nm $\pm$ 0,2 nm	410,2 nm $\pm$ 0,2 nm

**Tableau 1** – Longueurs d'onde des premières raies de la série de Balmer

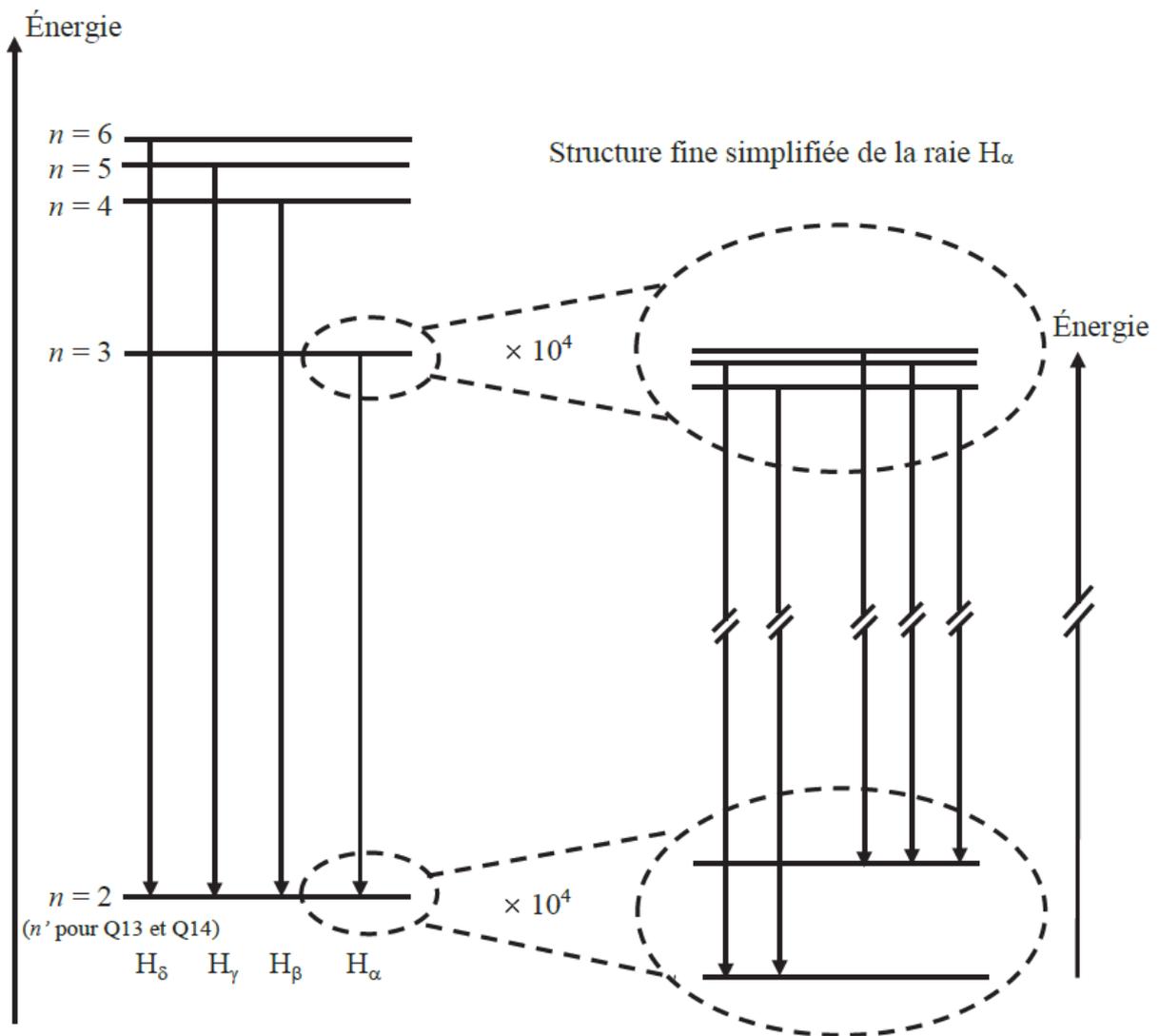
### Partie IV – Corrections relativistes de Sommerfeld (1916) : introduction de la constante de structure fine

Le modèle de Bohr fut un premier succès dans la prévision du spectre d'émission de l'hydrogène.

Mais les progrès de la spectroscopie ont rapidement conduit à observer que certaines raies vues initialement comme monochromatiques présentaient en fait une structure fine sous la forme de multiplets de raies voisines. C'est le cas, par exemple, de la raie H $\alpha$  qui fut observée comme un doublet par Michelson et Morley dès 1887, mais qui, plus tard, se révélera être formée de raies plus nombreuses. Sur la partie droite de la figure 2 se trouve la carte actuelle simplifiée des niveaux d'énergie et des multiplets de raies qui composent la raie H $\alpha$  (noter le changement d'échelle: facteur de zoom  $\times 10^4$  par rapport au spectre de la série de Balmer à gauche).

La première explication théorique de ces multiplets a été fournie par Sommerfeld en 1916 grâce à un traitement relativiste amélioré du modèle de Bohr utilisant la constante  $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}$  nommée

**constante de structure fine.**



**Figure 2** – Premières raies de la série de Balmer (à gauche) et structure fine (simplifiée) de la raie  $H_\alpha$  (à droite)

**Q15.** En explicitant  $R_y$  dans l'expression de  $\nu_n$  obtenue en **Q8**, donner  $\alpha$  en fonction de  $\nu_1$  et de  $c$ . En déduire la dimension de  $\alpha$ .

**Q16.** Donner la valeur numérique de  $\alpha$ , puis celle de son inverse  $1/\alpha$  (que l'on utilise bien plus volontiers).

Au terme de son calcul, Sommerfeld aboutit à l'expression des niveaux d'énergie  $E_{n,l}$  suivants, indicés par deux entiers ( $n, l$ ) avec  $n \geq 1$  et  $l = 0, 1, 2, \dots, n-1$  :

$$E_{n,l} = -\frac{R_y}{n^2} \left( 1 + \alpha^2 \frac{1}{n^2} \left( \frac{n}{l+1} - \frac{3}{4} \right) \right) \text{ où } \alpha \text{ est la constante de structure fine introduite ci-dessus.}$$

Trois années auparavant, Bohr avait trouvé (question **Q6**) l'expression suivante à un seul indice entier :  $E_n = -\frac{R_y}{n^2}$ .

**Q17.** Commenter la formule de Sommerfeld en liaison avec la formule de Bohr et la faible valeur de  $\alpha$ .

Combien de sous-niveaux d'énergie ce calcul prévoit-il pour les niveaux  $n = 2$  et  $n = 3$  de la formule de Bohr ?

**Q18.** Ces sous-niveaux constituent la structure fine de la raie  $H\alpha$ . En reproduisant sur votre copie la partie droite de la figure 2, identifier chacun de ces niveaux d'énergie par leurs indices  $(n, l)$  respectifs.

En déduire, en fonction de  $R_y$  et  $\alpha$ , l'expression de l'écart  $\Delta E_f = E_{2,1} - E_{2,0}$  entre les deux sous-niveaux  $n = 2$ .

Calculer la valeur numérique de  $\Delta E_f$  en électron-volts.

**Q19.** On rappelle que le nombre d'onde  $\sigma$  d'une radiation est l'inverse de sa longueur d'onde. Exprimer en fonction de  $h$ ,  $c$ , et  $\Delta E_f$ , l'écart  $\Delta\sigma = \sigma_a - \sigma_b$  des nombres d'onde  $\sigma_a$  et  $\sigma_b$  des radiations émises lors des deux transitions (a) et (b) suivantes :

(a) : obtenue par désexcitation depuis le niveau  $(n = 3, \ell = 1)$  vers le niveau  $(n = 2, \ell = 0)$

(b) : obtenue par désexcitation depuis le niveau  $(n = 3, \ell = 1)$  vers le niveau  $(n = 2, \ell = 1)$ .

Calculer  $\Delta\sigma$  en  $\text{cm}^{-1}$ , unité habituelle des spectroscopistes.