

## Programme de colles

 Venir avec un cahier de colles : y coller les énoncés des exercices et les reprendre à l'issue de la colle.

### Semaine 5      14/10/24 - 18/10/24

#### Programme :

Réduction (début) :

- Polynôme d'endomorphisme ou de matrice, morphisme d'algèbres  $P \mapsto P(u)$ ,  $\mathbb{K}[u]$  algèbre commutative, idéal des polynômes annulateurs de  $u$ , lemme des noyaux ;
- Valeur propre, vecteur propre, droite stable par un endomorphisme, sous-espace propre, polynôme d'endomorphisme et valeur propre, valeurs propres parmi les racines d'un polynôme annulateur ;
- si  $u \circ v = v \circ u$ , alors  $\text{Im } u$  et  $\text{Ker } u$  sont stables par  $v$  ;
- Endomorphisme induit sur un sous-espace propre ;
- Une somme de sous-espaces propres est directe, toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre ;
- Polynôme caractéristique, les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique, spectre d'un endomorphisme (en dimension finie) et d'une matrice, polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit ;
- Multiplicité d'une valeur propre, encadrement de la dimension d'un sous-espace propre ;
- Théorème de Cayley-Hamilton ;
- Polynôme minimal, divisibilité du polynôme caractéristique, racines du polynôme minimal, dimension de  $\mathbb{K}[u]$ .

#### Questions de cours : (avec preuve)

1. Pour  $D$  diagonale et  $T = D + N$  avec  $N$  triangulaire supérieure stricte, forme de  $P(D)$  et  $P(T)$  pour  $P \in \mathbb{K}[X]$  ;
2. Lemme des noyaux ;
3. Stabilité d'une droite vectorielle ;
4. Les valeurs propres sont parmi les racines d'un polynôme annulateur (avec le résultat antérieur utile  $P(u)(x) = P(\lambda)x$  si  $u(x) = \lambda x$ ) ;
5. Endomorphisme induit sur un sous-espace propre ;
6. Une somme de sous-espaces propres est directe et son corollaire pour une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes ;
7. Pour  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , on a  $\chi_A = X^n - \text{Tr}(A)X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(A)$  ;
8. Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit divise le polynôme caractéristique ;
9. Calcul de  $\chi_J$  avec  $J$  matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  constituée de 1 ;
10. Encadrement de la dimension d'un sous-espace propre ;

11. Théorème de Cayley-Hamilton ;
12. Racines du polynôme minimal ;
13. Pour  $\mathcal{B}$  base de  $E$ , on a  $\pi_{\text{mat}_{\mathcal{B}}u} = \pi_u$  ;
14. Base de  $\mathbb{K}[u]$ .