Feuille d'exercices n°13

Exercice 1 (*)

Montrer que $]-1\,;1\,[$ muni de la loi $\star$ définie par $x \star y = \dfrac{x+y}{1+xy}$ est un groupe commutatif.

Corrigé : La fonction th réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1\,;1\,[$. Soit $(x,y) \in\,]-1\,;1\,[$. Il existe u, v réels tels que $x = \operatorname{th} u$ et $y = \operatorname{th} v$ puis

$$x \star y = \frac{\operatorname{th} u + \operatorname{th} v}{1 + \operatorname{th} u \operatorname{th} v} = \operatorname{th}(u+v)$$

La loi $\star$ est donc une loi interne, clairement associative et commutative, d'élément neutre 0 et tout élément x admet pour symétrique $-x$. On conclut

$$\boxed{\text{L'ensemble } (]-1\,;1\,[\,,\star) \text{ est un groupe commutatif.}}$$

Remarque : Une vérification naïve sans la fonction th fonctionne sans difficulté.

Exercice 2 (**)

Soit φ un morphisme non constant d'un groupe fini $(\mathrm{G}, \star)$ vers $(\mathbb{C}^*, \times)$. Calculer

$$\sum_{x \in \mathrm{G}} \varphi(x)$$

On pourra considérer l'application $x \mapsto a \star x$ avec $a \in \mathrm{G}$ bien choisi.

Corrigé : Soit $a \in \mathrm{G}$ tel que $\varphi(a) \neq 1$. L'application $x \mapsto a \star x$ est une permutation de G dont la réciproque est donnée par $x \mapsto a^{-1} \star x$. Ainsi, on a

$$\sum_{x \in \mathrm{G}} \varphi(x) = \sum_{x \in \mathrm{G}} \varphi(a \star x) = \sum_{x \in \mathrm{G}} \varphi(a)\varphi(x) = \varphi(a) \sum_{x \in \mathrm{G}} \varphi(x)$$

Compte-tenu du choix de a, on conclut

$$\boxed{\sum_{x \in \mathrm{G}} \varphi(x) = 0}$$

Exercice 3 (*)

On pose $$\mathbb{Z}[i] = \{a + \mathrm{i}b, (a,b) \in \mathbb{Z}^2\}$$

Montrer que $(\mathbb{Z}[i], +, \times)$ est un anneau commutatif puis déterminer $\mathrm{U}(\mathbb{Z}[i])$. On pourra considérer l'application $\mathrm{N} : \mathbb{C} \to \mathbb{R}, z \mapsto z\bar{z}$.

Corrigé : On a $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ sous-groupe de $(\mathbb{C}, +)$ et contenant 1. Puis, soit (a,b), (c,d) dans $\mathbb{Z}^2$. On a

$$(a + \mathrm{i}b)(c + \mathrm{i}d) = ac - bd + \mathrm{i}(ad + bc) \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}]$$

et loi $\times$ est commutative. Ainsi

$$\boxed{\text{L'ensemble } \mathbb{Z}[\mathrm{i}] \text{ est un anneau commutatif.}}$$

Notons $\mathrm{N}(z) = z\bar{z}$ pour $z \in \mathbb{C}$. On a $\mathrm{N}(zz') = \mathrm{N}(z)\mathrm{N}(z')$ pour tout $(z,z') \in \mathbb{C}^2$ et

$$\forall (a,b) \in \mathbb{Z}^2 \qquad \mathrm{N}(a+\mathrm{i}b) = a^2+b^2 \in \mathbb{N}$$

Soit $a+\mathrm{i}b \in \mathrm{U}(\mathbb{Z}[\mathrm{i}])$. Il existe $c+\mathrm{i}d \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ tel que $(a+\mathrm{i}b)(c+\mathrm{i}d) = 1$ et

$$\mathrm{N}((a+\mathrm{i}b)(c+\mathrm{i}d)) = \mathrm{N}(a+\mathrm{i}b)\mathrm{N}(c+\mathrm{i}d) = \mathrm{N}(1) = 1 \quad \Longrightarrow \quad (a,b) \in \{(\pm 1, 0), (0, \pm 1)\}$$

Autrement dit $\qquad \mathrm{U}(\mathbb{Z}[\mathrm{i}]) \subset \{\pm 1, \pm \mathrm{i}\}$

L'inclusion réciproque est immédiate et on conclut

$$\boxed{\mathrm{U}(\mathbb{Z}[\mathrm{i}]) = \{\pm 1, \pm \mathrm{i}\}}$$

Remarque : L'anneau $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ est appelé *anneau des entiers de Gauss.*

Exercice 4 (**)

On note $\qquad \mathbb{D} = \left\{ \dfrac{p}{10^n},\ (p,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \right\}$

1. Montrer que $\mathbb{D}$ est un sous-anneau de $(\mathbb{Q}, +, \times)$.
2. Déterminer $\mathrm{U}(\mathbb{D})$.

Corrigé : 1. On a $1 = \dfrac{1}{10^0} \in \mathbb{D}$. Pour $(x,y) \in \mathbb{D}^2$, on a $x = \dfrac{p}{10^n}$ et $y = \dfrac{q}{10^m}$ avec $(p,q,n,m) \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{N}^2$ puis

$$x - y = \frac{p}{10^n} - \frac{q}{10^m} = \frac{10^m p - 10^n q}{10^{n+m}} \in \mathbb{D} \quad \text{et} \quad xy = \frac{p}{10^n}\frac{q}{10^m} = \frac{pq}{10^{n+m}} \in \mathbb{D}$$

Ainsi $\qquad \boxed{\text{L'ensemble } \mathbb{D} \text{ est un sous-anneau de } (\mathbb{Q}, +, \times).}$

2. Un élément de $\mathrm{U}(\mathbb{D})$ s'écrit $\dfrac{p}{10^n}$ et il existe q et m entiers tels que $\dfrac{pq}{10^{n+m}} = 1$. Ainsi, on a $pq = 10^{n+m}$ d'où $p | 10^{n+m}$ et par conséquent

$$\mathrm{U}(\mathbb{D}) \subset \left\{ (-1)^{\varepsilon} \frac{2^p 5^q}{10^n}, (\varepsilon, n, p, q) \in \{0,1\} \times \mathbb{N}^3 \right\}$$

Réciproquement, pour $(n,p,q) \in \mathbb{N}^3$, on a

$$\frac{10^n}{2^p 5^q} = \begin{cases} \dfrac{10^n 2^{q-p}}{10^q} & \text{si } q \geqslant p \\ \dfrac{10^n 5^{p-q}}{10^p} & \text{si } p \geqslant q \end{cases}$$

On conclut $\qquad \boxed{\mathrm{U}(\mathbb{D}) = \left\{ (-1)^{\varepsilon} \dfrac{2^p 5^q}{10^n}, (\varepsilon, n, p, q) \in \{0,1\} \times \mathbb{N}^3 \right\}}$

Exercice 5 (**)

Soit $(\mathrm{A}, +, \times)$ un anneau commutatif. Un élément $x \in \mathrm{A}$ est dit *nilpotent* s'il existe n entier non nul tel que $x^n = 0_{\mathrm{A}}$. On note

$$\mathcal{N}(\mathrm{A}) = \{x \in \mathrm{A} \mid x \text{ nilpotent}\}$$

1. Montrer que $\mathcal{N}(\mathrm{A})$ est un idéal de A.
2. Soit $a \in \mathcal{N}(\mathrm{A})$. Montrer que $1_{\mathrm{A}} - a$ est inversible.
3. Soit $a \in \mathcal{N}(\mathrm{A})$ et b inversible. Montrer que $a + b$ est inversible.

Corrigé : 1. On a $0 \in \mathcal{N}(\mathrm{A})$. Soit $(x, y) \in \mathcal{N}(\mathrm{A})^2$ et n, m entiers non nuls tels que $x^n = y^m = 0$. On a $(-x)^n = ((-1)x)^n = (-1)^n x^n = 0$ d'où $-x \in \mathcal{N}(\mathrm{A})$. Puis

$$(x+y)^{n+m} = \sum_{k=0}^{n+m} \binom{n}{k} x^k y^{n+m-k}$$

Pour $k \in [\![0\,; n+m]\!]$, on a un des deux exposants k ou $n+m-k$ suffisamment grand (on peut le voir comme une utilisation du principe des tiroirs : on doit placer $n+m$ chaussettes dans les deux tiroirs que constituent les exposants sur x et y dans la somme). Soit on a $k \geqslant n$, soit on a $k < n$ d'où $n+m-k > m$. Par suite, il vient $(x+y)^{n+m} = 0$ d'où $\mathcal{N}(\mathrm{A})$ sous-groupe de $(\mathrm{A}, +)$. Enfin, pour $(a, x) \in \mathrm{A} \times \mathcal{N}(\mathrm{A})$, avec n entier tel que $x^n = 0$, on a $(ax)^n = a^n x^n = 0$ et ainsi

$$\boxed{\text{L'ensemble } \mathcal{N}(\mathrm{A}) \text{ est un idéal de l'anneau A.}}$$

Remarque : L'idéal $\mathcal{N}(\mathrm{A})$ est appelé *nilradical* de l'anneau A.

2. Il existe n entier tel que $a^n = 0$. D'après l'identité de Bernoulli, on a

$$1 = 1 - a^n = (1-a) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}$$

Ainsi $$\boxed{\forall a \in \mathcal{N}(a) \qquad 1 - a \in \mathrm{U}(\mathrm{A})}$$

3. On a $a + b = b(1-c)$ avec $c = -b^{-1}a$ nilpotent puisque $\mathcal{N}(\mathrm{A})$ est un idéal. Ainsi, on a $1 - c \in \mathrm{U}(\mathrm{A})$ et comme $\mathrm{U}(\mathrm{A})$ est un groupe, on conclut

$$\forall (a, b) \in \mathcal{N}(\mathrm{A}) \times \mathrm{U}(\mathrm{A}) \qquad a + b = b(1 + b^{-1}a) \in \mathrm{U}(\mathrm{A})$$

Exercice 6 (**)

Un idéal I d'un anneau commutatif $(\mathrm{A}, +, \times)$ est dit *premier* si

$$\forall x, y \in \mathrm{A} \quad xy \in \mathrm{I} \quad \Longrightarrow \quad x \in \mathrm{I} \text{ ou } y \in \mathrm{I}$$

Décrire les idéaux premiers de $(\mathbb{K}[\mathrm{X}], +, \times)$.

Corrigé : Soit I idéal premier de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$. On suppose $\mathrm{I} \neq \{0\}$ sinon c'est immédiat par intégrité de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$. Il existe P unitaire tel que $\mathrm{I} = \mathrm{P} \cdot \mathbb{K}[\mathrm{X}]$. Si $\mathrm{P} = \mathrm{AB}$ avec A et B non constants, alors $\mathrm{AB} \in \mathrm{I}$ et $\mathrm{A} \notin \mathrm{I}$, $\mathrm{B} \notin \mathrm{I}$. On a donc nécessairement P irréductible. Supposons P irréductible qui divise AB. On a $\mathrm{P} \wedge \mathrm{A}$ diviseur de P donc $\mathrm{P} \wedge \mathrm{A} = 1$ ou P (car constant ou associé à P). Si $\mathrm{P} \wedge \mathrm{A} = \mathrm{P}$, comme $\mathrm{P} \wedge \mathrm{A} | \mathrm{A}$, c'est fini. Sinon, si $\mathrm{P} \wedge \mathrm{A} = 1$ d'après le lemme de Gauss, on a $\mathrm{P} | \mathrm{B}$. Ainsi

$$\boxed{\text{Les idéaux premiers de } \mathbb{K}[\mathrm{X}] \text{ sont exactement les } \mathrm{P} \cdot \mathbb{K}[\mathrm{X}] \text{ avec P irréductible.}}$$

Exercice 7 (**)

Soit n entier. Déterminer le reste de la division euclidienne X^n par $(\mathrm{X}-a)(\mathrm{X}-b)$ avec a, b dans $\mathbb{K}$.

Corrigé : D'après le théorème de la division euclidienne, il existe un unique couple $(\mathrm{Q}, \mathrm{R}) \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ tel que

$$\mathrm{X}^n = (\mathrm{X}-a)(\mathrm{X}-b)\mathrm{Q} + \mathrm{R} \qquad (*)$$

avec $\deg \mathrm{R} < 2$, autrement dit $\mathrm{R} = \alpha \mathrm{X} + \beta$ avec α, β scalaires.
Supposons $a \neq b$. En substituant X par a puis par b dans $(*)$, on obtient

$$\begin{cases} a^n = \alpha a + \beta \\ b^n = \alpha b + \beta \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = \dfrac{a^n - b^n}{a-b} \\ \beta = \dfrac{ab^n - ba^n}{a-b} \end{cases}$$

Ainsi $$\boxed{\text{Si } a \neq b, \text{ on a } \mathrm{R} = \frac{1}{a-b}\left((a^n - b^n)\mathrm{X} + ab^n - ba^n\right)}$$

Supposons $a = b$. Notant $\mathrm{S} = (\mathrm{X} - a)^2\mathrm{Q}$, on observe que S admet a pour racine double d'où $\mathrm{S}(a) = \mathrm{S}'(a) = 0$. En substituant X par a dans $(*)$ puis dans la relation obtenue par dérivation de $(*)$, on obtient

$$\begin{cases} a^n = \alpha a + \beta \\ na^{n-1} = \alpha \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = na^{n-1} \\ \beta = (1-n)a^n \end{cases}$$

Ainsi $$\boxed{\text{Si } a = b, \text{ on a } \mathrm{R} = na^{n-1}\mathrm{X} + (1-n)a^n}$$

Variantes : 1. Avec la formule de Taylor, on a

$$\mathrm{P} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{P}^{(k)}(a)}{k!}(\mathrm{X} - a)^k = \mathrm{R} + (\mathrm{X} - a)^2\mathrm{Q} \quad \text{et} \quad \mathrm{R} = \mathrm{P}(a) + \mathrm{P}'(a)(\mathrm{X} - a)$$

2. On peut aussi considérer la base des polynômes de Lagrange $\mathrm{L}_a = \dfrac{\mathrm{X} - b}{\mathrm{X} - a}$ et $\mathrm{L}_b = \dfrac{\mathrm{X} - a}{b - a}$. On a instantanément

$$\mathrm{R} = a^n\mathrm{L}_a + b^n\mathrm{L}_b$$

Exercice 8 (*)

Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ avec $\deg \mathrm{P} \geqslant 1$. Déterminer r le nombre de racines de P en fonction de P et $\mathrm{P} \wedge \mathrm{P}'$.

Corrigé : Notons $\mathrm{P} = \lambda \prod_{i=1}^{r} (\mathrm{X} - \alpha_i)^{m_i}$ avec λ, α_i des complexes, λ non nul et m_i des entiers non nuls. Comme α_i racine de P' de multiplicité $m_i - 1$, on a

$$\mathrm{P} \wedge \mathrm{P}' = \prod_{i=1}^{r} (\mathrm{X} - \alpha_i)^{m_i - 1}$$

puis $$\deg(\mathrm{P} \wedge \mathrm{P}') = \sum_{i=1}^{r} (m_i - 1) = \deg \mathrm{P} - r$$

Ainsi $$\boxed{r = \deg \mathrm{P} - \deg(\mathrm{P} \wedge \mathrm{P}')}$$

Exercice 9 (**)

Soit $(\mathrm{T}_n)_n$ une suite de polynômes de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ définie par

$$\mathrm{T}_0 = 1, \quad \mathrm{T}_1 = \mathrm{X}, \quad \forall n \geqslant 2 \quad \mathrm{T}_n = 2\mathrm{X}\mathrm{T}_{n-1} - \mathrm{T}_{n-2}$$

1. Calculer $\mathrm{T}_2, \mathrm{T}_3$.
2. Déterminer le degré, le coefficient dominant et la parité de T_n.
3. Montrer que $\quad \forall (n, \theta) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R} \qquad \mathrm{T}_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$
4. En déduire une expression factorisée de T_n.

Corrigé : 1. Le calcul donne $\boxed{\mathrm{T}_2 = 2\mathrm{X}^2 - 1 \qquad \mathrm{T}_3 = 4\mathrm{X}^3 - \mathrm{X}}$

2. On peut conjecturer que pour n entier non nul, on a $\deg \mathrm{T}_n = n$ avec pour coefficient dominant 2^{n-1} et même parité que n . Prouvons cela par une récurrence double. On note

$$\mathscr{P}(n): \quad \mathrm{T}_n = 2^{n-1}\mathrm{X}^n + \mathrm{Q}_n \quad \text{avec} \quad \deg \mathrm{Q}_n < n \quad \text{et} \quad \mathrm{T}_n(-\mathrm{X}) = (-1)^n \mathrm{T}_n(\mathrm{X})$$

• $\mathscr{P}(1), \mathscr{P}(2)$: l'initialisation est immédiate.

• $\mathscr{P}(n-1)$ et $\mathscr{P}(n) \Longrightarrow \mathscr{P}(n+1)$: prouvons l'hérédité, supposons $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n-1)$ vraies pour n fixé supérieur ou égal à 2. Par suite

$$\begin{aligned}
\mathrm{T}_{n+1} &= 2\mathrm{X}\mathrm{T}_n - \mathrm{T}_{n-1} \\
&= 2\mathrm{X}\left(2^{n-1}\mathrm{X}^n + \mathrm{Q}_n\right) - \mathrm{T}_{n-1} \\
\mathrm{T}_{n+1} &= 2^n\mathrm{X}^{n+1} + [2\mathrm{X}\mathrm{Q}_n - \mathrm{T}_{n-1}]
\end{aligned}$$

Posons $\mathrm{Q}_{n+1} = 2\mathrm{X}\mathrm{Q}_n - \mathrm{T}_{n-1}$. On a

$$\begin{aligned}
\deg \mathrm{Q}_{n+1} &\leqslant \max\left(\deg 2\mathrm{X}\mathrm{Q}_n, \deg \mathrm{T}_{n-1}\right) \\
&\leqslant \max(1 + n - 1, n - 1) = n < n + 1
\end{aligned}$$

Et
$$\begin{aligned}
\mathrm{T}_{n+1}(-\mathrm{X}) &= 2(-\mathrm{X})\mathrm{T}_n(-\mathrm{X}) - \mathrm{T}_{n-1}(-\mathrm{X}) \\
&= 2(-1)^{n+1}\mathrm{T}_n(\mathrm{X}) - (-1)^{n-1}\mathrm{T}_{n-1}(\mathrm{X}) = (-1)^{n+1}\mathrm{T}_{n+1}(\mathrm{X})
\end{aligned}$$

le dernière égalité résultant de l'égalité $(-1)^{n+1} = (-1)^{n-1}$ ce qui clôt la récurrence. On a donc prouvé

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \mathrm{T}_n = 2^{n-1}\mathrm{X}^n + \mathrm{Q}_n \quad \text{avec} \quad \deg \mathrm{Q}_n < n \quad \text{et} \quad \mathrm{T}_n(-\mathrm{X}) = (-1)^n \mathrm{T}_n(\mathrm{X})}$$

3. On procède encore par récurrence double. On note

$$\mathscr{P}(n): \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{T}_n(\cos x) = \cos(nx)$$

• $\mathscr{P}(1), \mathscr{P}(2)$: Soit x réel. On a

$$\mathrm{T}_1(\cos x) = \cos x \qquad \mathrm{T}_2(x) = 2\cos^2 x - 1 = \cos(2x)$$

L'initialisation est vérifiée.
• $\mathscr{P}(n-1)$ et $\mathscr{P}(n) \Longrightarrow \mathscr{P}(n+1)$: prouvons l'hérédité, supposons $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n-1)$ vraies pour n fixé supérieur ou égal à 2. Par suite, pour x réel, il vient

$$\begin{aligned}
\mathrm{T}_{n+1}(\cos x) &= 2\cos x \mathrm{T}_n(\cos x) - \mathrm{T}_{n-1}(\cos x) \\
&= 2\cos x \cos(nx) - \cos((n-1)x) \\
&= 2\cos x \cos(nx) - [\cos(nx)\cos x + \sin(nx)\sin(x)] \\
\mathrm{T}_{n+1}(\cos x) &= \cos(nx)\cos x - \sin(nx)\sin x = \cos((n+1)x)
\end{aligned}$$

ce qui clôt la récurrence. On a donc montré

$$\boxed{\forall (n, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R} \qquad \mathrm{T}_n(\cos x) = \cos(nx)}$$

4. Soit n entier non nul. D'après la propriété établie à la question précédente, on a pour x réel

$$\mathrm{T}_n(\cos x) = 0 \iff \cos(nx) = 0 \iff nx \in \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \iff x \in \left\{\frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Ce dernier ensemble est infini (puisque $\mathbb{Z}$ l'est). Mais les racines de T_n sont en nombre fini donc on peut se contenter de ne garder que certaines valeurs de x candidates. Comme $x \mapsto \cos x$

réalise une bijection de $[0;\pi]$ sur $[-1;1]$, on va se restreindre aux valeurs de x qui sont dans $[0;\pi]$. On a

$$\forall k \in [\![0\,;\, n-1]\!] \qquad 0 < \frac{\pi}{2n} \leqslant \frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n} \leqslant \frac{\pi(n-1/2)}{n} < \pi$$

L'applications $x \mapsto \cos x$ étant en particulier injective sur $[0;\pi]$, des valeurs deux à deux distinctes de $[0;\pi]$ ont des images par la fonction cos qui sont également deux à deux distinctes d'où

$$\operatorname{Card}\left\{\frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n},\ k \in [\![0\,;\, n-1]\!]\right\} = \operatorname{Card}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n}\right),\ k \in [\![0\,;\, n-1]\!]\right\} = n$$

Ainsi, les $X - \cos\left(\frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n}\right)$ divisent T_n et sont premiers entre eux d'où

$$\prod_{k=0}^{n-1}\left[X - \cos\left(\frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n}\right)\right] \text{ divise } T_n$$

Or

$$\deg \prod_{k=0}^{n-1}\left[X - \cos\left(\frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n}\right)\right] = n = \deg T_n$$

et comme 2^{n-1} est le coefficient dominant de T_n, on conclut que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad T_n = 2^{n-1}\prod_{k=0}^{n-1}\left[X - \cos\left(\frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n}\right)\right]}$$

Exercice 10 (*)

Soit

$$\varphi\colon \begin{cases} \mathbb{K}_{2n-1}[X] \longrightarrow \mathbb{K}^{2n} \\ \quad P \qquad \longmapsto (P(0), P'(0), \ldots, P^{(n-1)}(0), P(1), P'(1), \ldots, P^{(n-1)}(1)) \end{cases}$$

Montrer que φ est bijective.

Corrigé : On a $\varphi \in \mathscr{L}(\mathbb{K}_{2n-1}[X], \mathbb{K}^{2n})$, la linéarité résultant simplement de la linéarité de la dérivation. On remarque l'égalité des dimensions

$$\dim \mathbb{K}_{2n-1}[X] = \dim \mathbb{K}^{2n}$$

On a donc φ isomorphisme si et seulement si φ injective (si et seulement si φ surjective). Soit $P \in \operatorname{Ker} \varphi$. On a 0 et 1 qui sont racines de P de mulitplicité n donc X^n et $(X-1)^n$ divise P. Comme ces polynômes sont premiers entre eux, on a $X^n(X-1)^n$ divise P mais $\deg P \leqslant 2n-1$. Il s'ensuit que P est le polynôme nul et par suite

$$\boxed{\text{L'application } \varphi \text{ est un isomorphisme de } \mathbb{K}_{2n-1}[X] \text{ sur } \mathbb{K}^{2n}.}$$

Exercice 11 (**)

Soit $X \subset \mathbb{R}_+$ un ensemble fini non vide. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\forall x \in X \qquad P(x) = \sqrt{x}$$

Corrigé : Notons $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ et $(L_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ la famille des polynômes interpolateurs de Lagrange associés à X. On a $L_i(x_j) = \delta_{i,j}$ pour tout $(i,j) \in [\![1\,;\, n]\!]^2$. On choisit alors $P = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{x_i} L_i$. On a

$$\boxed{\forall j \in [\![1\,;\, n]\!] \qquad P(x_j) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{x_i} L_i(x_j) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{x_i}\,\delta_{i,j} = \sqrt{x_j}}$$

Exercice 12 (*)

Parmi les ensembles suivants, lesquels ont une structure de $\mathbb{K}$-algèbres :

— $\mathscr{D}_n(\mathbb{K})$ ensemble des matrices diagonales de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$,

— $\mathscr{T}_n^+(\mathbb{K})$ ensemble des matrices triangulaires supérieures de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$,

— $\mathscr{T}_n^{++}(\mathbb{K})$ ensemble des matrices triangulaires supérieures strites de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$,

— $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ ensemble des matrices symétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$?

Corrigé : On sait que les ensembles de matrices diagonales et triangulaires supérieures sont des sev de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ stables par produit matriciel. En revanche, on a $\mathrm{I}_n \notin \mathscr{T}_n^{++}(\mathbb{K})$ et notant $\mathrm{A} = \mathrm{E}_{1,1} + 2\mathrm{E}_{2,2}$ et $\mathrm{B} = \mathrm{E}_{1,2} + \mathrm{E}_{2,1}$, on trouve $\mathrm{AB} = \mathrm{E}_{1,2} + 2\mathrm{E}_{2,1}$ qui n'est pas symétrique et on conclut

$$\boxed{\text{Les ensembles } \mathscr{D}_n(\mathbb{K}) \text{ et } \mathscr{T}_n^+(\mathbb{K}) \text{ sont des } \mathbb{K}\text{-algèbres mais pas } \mathscr{T}_n^{++}(\mathbb{K}) \text{ et } \mathscr{S}_n(\mathbb{K}).}$$

Exercice 13 (*)

Déterminer les morphismes de $\mathbb{R}$-algèbres de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.

Corrigé : Soit $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ un morphisme de $\mathbb{R}$-algèbres. On a $\varphi(1) = 1$ puis, pour $(x, y, \lambda) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{R}$

$$\varphi(\lambda x + y) = \lambda\varphi(x) + \varphi(y) \qquad \varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$$

Ainsi $$\varphi(\mathrm{i}^2) = \varphi(-1) = -\varphi(1) = -1 = \varphi(\mathrm{i})^2$$

d'où $\varphi(\mathrm{i}) = \pm\,\mathrm{i}$. On en déduit que φ est l'identité ou la conjugaison. Réciproquement, on vérifie que ces applications sont bien des morphisme de $\mathbb{R}$-algèbres de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ et on conclut

$$\boxed{\text{Les morphismes de } \mathbb{R}\text{-algèbres de } \mathbb{C} \text{ dans } \mathbb{C} \text{ sont l'identité et la conjugaison.}}$$