ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Feuille d'exercices n°14

Exercice 1 (**)

On note $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients dans $\mathbb{Z}$ et de déterminant égal à 1. Montrer que $(\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}), \times)$ est un groupe.

Corrigé : On a $\mathrm{I}_n \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$. Soit $\mathrm{M} \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$. On a $\mathrm{Com}(\mathrm{M})^\top \mathrm{M} = \det(\mathrm{M})\mathrm{I}_n = \mathrm{I}_n$ d'où M inversible dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ d'inverse $\mathrm{Com}(\mathrm{M})^\top$. Comme on a

$$\mathrm{Com}(\mathrm{M}) = \left((-1)^{i+j}\det(\mathrm{M}_{i,j})\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$$

avec $\mathrm{M}_{i,j}$ matrice extraite de M par suppression de la i-ème ligne et j-ième colonne pour $(i,j) \in [\![1\,;\, n]\!]^2$, on en déduit que l'inverse de M est bien dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$ et $\det(\mathrm{M}^{-1}) = \det(\mathrm{M})^{-1} = 1$ d'où $\mathrm{M}^{-1} \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$. Enfin, pour $(\mathrm{M},\mathrm{N}) \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})^2$, on a $\mathrm{MN} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$ clairement et $\det(\mathrm{MN}) = \det(\mathrm{M})\det(\mathrm{N}) = 1$ ce qui prouve que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ est un sous-groupe de $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \times)$ et par suite

$$\boxed{(\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}), \times) \text{ est un groupe.}}$$

Exercice 2 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et G un sous-groupe de GL(E) de cardinal fini n. Montrer

$$\dim \bigcap_{g\in\mathrm{G}} \mathrm{Ker}\,(g - \mathrm{id}\,) = \frac{1}{n}\sum_{g\in\mathrm{G}} \mathrm{Tr}\,(g)$$

Corrigé : On pose $p = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{g\in\mathrm{G}} g$. On a clairement $p \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. Pour $h \in \mathrm{G}$ fixé, l'application $g \mapsto h\circ g$ est une permutation de G (d'inverse $g \mapsto h^{-1}\circ g$). Par conséquent, on a $\sum\limits_{g\in\mathrm{G}} h\circ g = \sum\limits_{g\in\mathrm{G}} g$ d'où

$$h\circ p = \frac{1}{n}\sum_{g\in\mathrm{G}} h\circ g = \frac{1}{n}\sum_{g\in\mathrm{G}} g = p$$

Ainsi
$$p^2 = \frac{1}{n}\sum_{h\in\mathrm{G}} h\circ p = \frac{1}{n}\sum_{h\in\mathrm{G}} p = p$$

ce qui prouve que p est un projecteur. En considérant une base adaptée à p, on obtient $\mathrm{Tr}\,(p) = \mathrm{rg}\,(p) = \dim \mathrm{Ker}\,(\mathrm{id}\, - p)$. Soit $g \in \mathrm{G}$. On a vu $g\circ p = p$. Soit $x \in \mathrm{Ker}\,(\mathrm{id}\, - p)$. Alors

$$p(x) = x \quad\Longrightarrow\quad g(x) = g\circ p(x) = p(x) = x$$

autrement dit $x \in \mathrm{Ker}\,(g - \mathrm{id}\,)$ pour tout $g \in \mathrm{G}$ d'où $\mathrm{Ker}\,(p - \mathrm{id}\,) \subset \bigcap\limits_{g\in\mathrm{G}} \mathrm{Ker}\,(g - \mathrm{id}\,)$ et l'inclusion réciproque est immédiate. On conclut

$$\boxed{\dim \bigcap_{g\in\mathrm{G}} \mathrm{Ker}\,(g - \mathrm{id}\,) = \frac{1}{n}\sum_{g\in\mathrm{G}} \mathrm{Tr}\,(g)}$$

Exercice 3 (****)

Soit $(\mathrm{A},+,\times)$ un anneau. Montrer

$$\forall (x,y)\in \mathrm{A}^2 \qquad 1_\mathrm{A}-xy\in \mathrm{U}(\mathrm{A}) \iff 1_\mathrm{A}-yx\in \mathrm{U}(\mathrm{A})$$

On pourra supposer en premier lieu que xy est nilpotent.

Corrigé : Soit n entier non nul tel que $(xy)^n=0$. Par associativité, on a $(yx)^{n+1}=y(xy)^n x=0$. Par téléscopage, comme xy et yx commutent avec 1_A, il vient

$$(1_\mathrm{A}-yx)\sum_{k=0}^{n}(yx)^k=\sum_{k=0}^{n}\left[(yx)^k-(yx)^{k+1}\right]=1_\mathrm{A}=\sum_{k=0}^{n}\left[(yx)^k-(yx)^{k+1}\right]=\sum_{k=0}^{n}(yx)^k(1_\mathrm{A}-yx)$$

et de même $$(1_\mathrm{A}-xy)\sum_{k=0}^{n-1}(xy)^k=1_\mathrm{A}=\sum_{k=0}^{n-1}(xy)^k(1_\mathrm{A}-xy)$$

Notant $z=(1_\mathrm{A}-xy)^{-1}=\sum_{k=0}^{n-1}(xy)^{k-1}$, il vient

$$(1_\mathrm{A}-yx)^{-1}=\sum_{k=0}^{n}(yx)^k=1_\mathrm{A}+\sum_{k=1}^{n-1}y(xy)^{k-1}x=1_\mathrm{A}+y\left(\sum_{k=0}^{n-1}(xy)^k\right)x=1_\mathrm{A}+yzx$$

d'où $$(1_\mathrm{A}-yx)(1_\mathrm{A}+yzx)=(1_\mathrm{A}+yzx)(1_\mathrm{A}-yx)=1_\mathrm{A}$$

Vérifions cette égalité sans l'hypothèse de nilpotence de xy. On suppose $1_\mathrm{A}-xy\in \mathrm{U}(\mathrm{A})$ et on note $z=(1_\mathrm{A}-xy)^{-1}$. On a donc $(1_\mathrm{A}-xy)z=1_\mathrm{A}$ d'où $z-1_\mathrm{A}=xyz$. Puis

$$(1_\mathrm{A}-yx)(1_\mathrm{A}+yzx)=1_\mathrm{A}-yx+yzx-y(xyz)x=1_\mathrm{A}-yx+yzx-y(z-1_\mathrm{A})x=1_\mathrm{A}$$

et on procède de même avec $z(1_\mathrm{A}-xy)=1_\mathrm{A}$ pour établir que $1_\mathrm{A}-yx$ est inversible. Par symétrie des rôles, on conclut

$$\boxed{\forall (x,y)\in \mathrm{A}^2 \qquad 1_\mathrm{A}-xy\in \mathrm{U}(\mathrm{A}) \iff 1_\mathrm{A}-yx\in \mathrm{U}(\mathrm{A})}$$

Exercice 4 (**)

Soit I un idéal d'un anneau commutatif $(\mathrm{A},+,\times)$. On définit le *radical* de I noté R(I) par

$$\mathrm{R}(\mathrm{I})=\{x\in \mathrm{A}\mid \exists n\in \mathbb{N}^* \;:\; x^n\in \mathrm{I}\}$$

1. Montrer que R(I) est un idéal de A contenant I.
2. Montrer que pour I, J des idéaux de A, on a

$$\mathrm{I}\subset \mathrm{J}\Longrightarrow \mathrm{R}(\mathrm{I})\subset \mathrm{R}(\mathrm{J}) \qquad \mathrm{R}(\mathrm{I}\cap \mathrm{J})=\mathrm{R}(\mathrm{I})\cap \mathrm{R}(\mathrm{J}) \qquad \mathrm{R}(\mathrm{I})+\mathrm{R}(\mathrm{J})\subset \mathrm{R}(\mathrm{I}+\mathrm{J})$$

3. Soit I idéal de A. Montrer $\qquad \mathrm{R}(\mathrm{R}(\mathrm{I}))=\mathrm{R}(\mathrm{I})$

Corrigé : 1. On a $0_\mathrm{A}\in \mathrm{R}(\mathrm{I})$ puisque $0_\mathrm{A}^1=0_\mathrm{A}\in \mathrm{I}$. Soit $(x,y)\in \mathrm{R}(\mathrm{I})^2$. Il existe des entiers non nuls n et m tels que $x^n\in \mathrm{I}$ et $y^m\in \mathrm{I}$. On rappelle que dans un anneau, on a $(-y)^k=(-1)^k y^k$ pour tout k entier. Puis

$$(x-y)^{n+m}=\sum_{k=0}^{n+m}\binom{n+m}{k}x^k(-1)^{n+m-k}y^k$$

et on a $$\forall k\in [\![\,0\,;\,n+m\,]\!] \qquad k\geqslant n \quad \text{ou} \quad n+m-k\geqslant m$$

car $$k<n \quad \text{et} \quad n+m-k<m \iff k<n \quad \text{et} \quad k>n$$

ce qui est faux. Ainsi, pour $k \in [\![0\,;\, n+m]\!]$, on a $x^k \in \mathrm{I}$ ou $y^{n+m-k} \in \mathrm{I}$ et par absorption

$$\forall k \in [\![0\,;\, n+m]\!] \qquad x^k y^{n+m-k} \in \mathrm{I}$$

et par suite $x - y \in \mathrm{I}$. Enfin, pour $(x, a) \in \mathrm{R(I)} \times \mathrm{A}$ et n entier non nul tel que $x^n \in \mathrm{I}$, on a $(xa)^n = x^n a^n \in \mathrm{I}$ par absorption et $x^1 = x \in \mathrm{I}$ d'où

$$\boxed{\text{Le radical R(I) est un idéal de A contenant I.}}$$

2. Supposons $\mathrm{I} \subset \mathrm{J}$. Soit $x \in \mathrm{R(I)}$ et n entier non nul tel que $x^n \in \mathrm{I}$. On a donc $x^n \in \mathrm{J}$ d'où $x \in \mathrm{R(J)}$. Avec cette propriété, si I et J sont des idéaux quelconques de A, on a $\mathrm{I} \cap \mathrm{J} \subset \mathrm{I}$ et $\mathrm{I} \cap \mathrm{J} \subset \mathrm{J}$ d'où $\mathrm{R(I \cap J)} \subset \mathrm{R(I)}$ et $\mathrm{R(I \cap J)} \subset \mathrm{R(J)}$ donc $\mathrm{R(I \cap J)} \subset \mathrm{R(I)} \cap \mathrm{R(J)}$. Soit $x \in \mathrm{R(I)} \cap \mathrm{R(J)}$ et n, m entiers non nuls tels que $x^n \in \mathrm{I}$ et $x^m \in \mathrm{J}$. Notant $p = \max(n, m)$, on a par absorption $x^p \in \mathrm{I}$ et $x^p \in \mathrm{J}$ d'où $x^p \in \mathrm{I} \cap \mathrm{J}$ ce qui prouve $\mathrm{R(I)} \cap \mathrm{R(J)} \subset \mathrm{R(I \cap J)}$. Enfin, l'idéal $\mathrm{R(I+J)}$ est stable par $+$ en tant que sous-groupe de $(\mathrm{A}, +)$ et comme $\mathrm{I} \subset \mathrm{I+J}$, $\mathrm{J} \subset \mathrm{I+J}$, il s'ensuit $\mathrm{R(I)} \subset \mathrm{R(I+J)}$ et $\mathrm{R(J)} \subset \mathrm{R(I+J)}$ d'où $\mathrm{R(I)} + \mathrm{R(J)} \subset \mathrm{R(I+J)}$. Ainsi

$$\boxed{\mathrm{I} \subset \mathrm{J} \Longrightarrow \mathrm{R(I)} \subset \mathrm{R(J)} \qquad \mathrm{R(I \cap J)} = \mathrm{R(I)} \cap \mathrm{R(J)} \qquad \mathrm{R(I)} + \mathrm{R(J)} \subset \mathrm{R(I+J)}}$$

4. On a $\mathrm{I} \subset \mathrm{R(I)}$ d'où $\mathrm{R(I)} \subset \mathrm{R(R(I))}$. Soit $x \in \mathrm{R(R(I))}$. Il existe n entier non nul tel que $x^n \in \mathrm{R(I)}$ puis m entier non nul tel que $(x^n)^m = x^{nm} \in \mathrm{I}$. On en déduit clairement que $x \in \mathrm{R(I)}$ d'où

$$\boxed{\mathrm{R(I)} = \mathrm{R(R(I))}}$$

Exercice 5 (**)

Que peut-on dire d'une suite croissante d'idéaux de $(\mathbb{K}[\mathrm{X}], +, \times)$?

Corrigé : Soit $(\mathrm{I}_n)_n$ une suite croissante d'idéaux de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$. Quitte à réindexer, on suppose que les idéaux sont non nuls (le cas d'une suite nulle est trivial). Pour n entier, il existe P_n polynôme unitaire de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ tel que $\mathrm{I}_n = \mathrm{P}_n \mathbb{K}[\mathrm{X}]$. Avec l'inclusion $\mathrm{P}_n \mathbb{K}[\mathrm{X}] \subset \mathrm{P}_{n+1} \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ pour n entier, on en déduit $\mathrm{P}_{n+1} | \mathrm{P}_n$. Par conséquent, la suite $(\deg \mathrm{P}_n)_n$ est décroissante. Comme elle est à valeurs entières, elle est stationnaire et d'après la relation de divisibilité, la suite des polynômes unitaires est également stationnaire et on conclut

$$\boxed{\text{Une suite croissante d'idéaux de } \mathbb{K}[\mathrm{X}] \text{ stationne.}}$$

Remarque : Cette propriété est caractéristique des *anneaux noetheriens*, *i.e.* les anneaux dont les idéaux sont engendrés par un nombre fini d'éléments.

Exercice 6 (**)

Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ scindé à racines simples avec $\deg \mathrm{P} > 1$.

1. Montrer que P' est également scindé à racines simples.
2. Montrer que P ne peut avoir deux coefficients nuls consécutifs.

Corrigé : 1. Notons $\alpha_1 < \ldots < \alpha_n$ les racines de P. D'après le théorème de Rolle, il existe $\beta_k \in \,]\,\alpha_k\,;\alpha_{k+1}\,[$ pour tout $k \in [\![1\,;\, n-1]\!]$ $(n - 1 \geqslant 1)$ et par suite

$$\boxed{\text{Le polynôme P}' \text{ est scindé à racines simples.}}$$

2. Une récurrence immédiate donne $\mathrm{P}^{(k)}$ scindé à racines simples pour tout $k \in [\![0\,;\, n-1]\!]$ avec $p \in [\![0\,;\, n-1]\!]$. Notons $\mathrm{P(X)} = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \mathrm{X}^k$ et supposons $a_p = a_{p+1} = 0$. On a

$$\mathrm{P}^{(p)}(\mathrm{X}) = \sum_{k=p}^{n} a_k \frac{k!}{(k-p)!}\mathrm{X}^{k-p} = \mathrm{X}^2 \left(\sum_{k=p+2}^{n} a_k \frac{k!}{(k-p)!}\mathrm{X}^{k-p-2} \right)$$

Ceci contredit le caractère scindé à racines simples donc

$$\boxed{\text{Le polynôme P ne peut avoir deux coefficients nuls consécutifs.}}$$

Exercice 7 (**)

Soient $x_0, \dots, x_n$ des réels deux à deux distincts. Montrer

$$\exists!(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \quad | \quad \forall \mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}] \qquad \int_0^1 \mathrm{P}(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \mathrm{P}(x_k)$$

Corrigé : On note $(\mathrm{L}_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ la famille des polynômes de Lagrange associée à $(x_j)_{0 \leqslant j \leqslant n}$, c'est-à-dire $\mathrm{L}_i(x_j) = \delta_{i,j}$ pour $(i,j) \in [\![0\,;\,n]\!]^2$. Supposons l'existence des λ_k. Par suite

$$\forall k \in [\![0\,;\,n]\!] \qquad \int_0^1 \mathrm{L}_k(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \mathrm{L}_k(x_i) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \delta_{i,k} = \lambda_k$$

ce qui prouve l'unicité sous réserve d'existence. La synthèse est alors immédiate en écrivant la décomposition de P dans la base $(\mathrm{L}_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ à savoir $\mathrm{P} = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{P}(x_k)\mathrm{L}_\mathrm{K}$, ce qui prouve

$$\boxed{\exists!(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \quad | \quad \forall \mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}] \qquad \int_0^1 \mathrm{P}(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \mathrm{P}(x_k)}$$

Exercice 8 (**)

On note $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$. Pour $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$, on pose

$$\forall k \in \mathbb{Z} \qquad c_k(\mathrm{P}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{P}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}t$$

1. Pour $k \in \mathbb{Z}$ et $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$, déterminer $c_k(\mathrm{P})$ en fonction des coefficients de P.
2. Déterminer les polynômes $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ tels que $\mathrm{P}(\mathbb{U}) \subset \mathbb{R}$.

Corrigé : 1. Soit $k \in \mathbb{Z}$ et $\mathrm{P} = \sum\limits_{j=0}^{n} a_j \mathrm{X}^j$. Par linéarité de l'intégrale, on a

$$c_k(\mathrm{P}) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^{n} a_j \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(j-k)t}\,\mathrm{d}t}_{=2\pi\delta_{j,k}}$$

Ainsi $$\boxed{\forall \mathrm{P} = \sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{X}^k \qquad \forall k \in \mathbb{Z} \qquad c_k(\mathrm{P}) = \begin{cases} a_k & \text{si } k \in [\![0\,;\,n]\!] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

2. Pour $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ tel que $\mathrm{P}(\mathbb{U}) \subset \mathbb{R}$, il vient par conjugaison

$$\forall k \in \mathbb{Z} \qquad \overline{c_k(\mathrm{P})} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\mathrm{P}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}_{\in \mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}t = c_{-k}(\mathrm{P})$$

On en déduit $c_k(\mathrm{P}) = 0$ pour tout k entier relatif non nul puis $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_0[\mathrm{X}]$. Réciproquement, de tels polynômes sont solutions et on conclut

$$\boxed{\{\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}] \mid \mathrm{P}(\mathbb{U}) \subset \mathbb{R}\} = \mathbb{R}_0[\mathrm{X}]}$$

Exercice 9 (***)

Soit $\mathrm{P} = \mathrm{X}^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \mathrm{X}^k \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ unitaire. Montrer que toute racine ω de P vérifie

$$|\omega| \leqslant 1 + \operatorname*{Max}_{k \in [\![0\,;\, n-1]\!]} |a_k|$$

Corrigé : On note $\mathrm{M} = \operatorname*{Max}_{k \in [\![0\,;\, n-1]\!]} |a_k|$. Si $|\omega| \leqslant 1$, l'inégalité est vraie. Supposons $|\omega| > 1$. On a

$$w^n = -\sum_{k=0}^{n-1} a_k \omega^k$$

d'où
$$|\omega|^n \leqslant \mathrm{M} \sum_{k=0}^{n} |\omega|^k = \mathrm{M} \frac{|\omega|^n - 1}{|\omega| - 1}$$

Comme $|\omega| - 1 > 0$, il vient
$$|\omega| - 1 \leqslant \mathrm{M} \frac{|\omega|^n - 1}{|\omega|^n} \leqslant \mathrm{M}$$

Ainsi
$$\boxed{|\omega| \leqslant 1 + \operatorname*{Max}_{k \in [\![0\,;\, n-1]\!]} |a_k|}$$

Exercice 10 (***)

Soit $\mathrm{P} = \sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{X}^k \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$. On note $\mathrm{M} = \operatorname*{Sup}_{|z|=1} |\mathrm{P}(z)|$.

Montrer
$$\forall k \in [\![0\,;\, n]\!] \qquad |a_k| \leqslant \mathrm{M}$$

Corrigé : Soit $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{n+1}}$. On a

$$\forall \ell \in [\![0\,;\, n]\!] \qquad \mathrm{P}(\omega^\ell) = \sum_{k=0}^{n} a_k \omega^{k\ell}$$

puis, en permutant les sommes, il vient

$$\sum_{\ell=0}^{n} \mathrm{P}(\omega^\ell) = \sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{\ell=0}^{n} \omega^{k\ell} = (n+1) a_0$$

d'où
$$a_0 = \frac{1}{n+1} \sum_{\ell=0}^{n} \mathrm{P}(\omega^\ell)$$

Or
$$|a_0| \leqslant \frac{1}{n+1} \sum_{\ell=0}^{n} \left|\mathrm{P}(\omega^\ell)\right| \leqslant \mathrm{M}$$

Plus généralement, pour $p \in [\![0\,;\, n]\!]$, on trouve

$$\sum_{\ell=0}^{n} \mathrm{P}(\omega^\ell) \omega^{-p\ell} = \sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{\ell=0}^{n} \omega^{\ell(k-p)} = (n+1) a_p$$

autrement dit
$$\forall p \in [\![0\,;\, n]\!] \qquad a_p = \frac{1}{n+1} \sum_{\ell=0}^{n} \mathrm{P}(\omega^\ell) \omega^{-p\ell}$$

Et on conclut comme précédemment, par inégalité triangulaire. Ainsi

$$\boxed{\forall k \in [\![0\,;\, n]\!] \qquad |a_k| \leqslant \mathrm{M}}$$

Variantes : 1. Pour $\mathrm{P} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \mathrm{X}^k \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$, on a

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad a_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{P}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}t$$

Pour k entier, il vient par inégalité triangulaire

$$|a_k| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{P}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|\mathrm{P}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\right|\,\mathrm{d}t \leqslant \mathrm{N}_1(\mathrm{P})$$

On observe que c'est la même idée de « moyenne » des coefficients de Fourier, dans sa version discrète puis continue.

2. On pose $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{n+1}}$. On a

$$\forall \ell \in [\![\, 0\,;\, n \,]\!] \qquad \mathrm{P}(\omega^\ell) = \sum_{k=0}^{n} a_k \omega^{k\ell} \iff \begin{pmatrix} \mathrm{P}(\omega^0) \\ \vdots \\ \mathrm{P}(\omega^n) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & \omega & \ldots & \omega^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \omega^n & \ldots & \omega^{2n} \end{pmatrix}}_{=\mathrm{V}} \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

On vérifie $\mathrm{V}\bar{\mathrm{V}} = (n+1)\mathrm{I}_{n+1}$ d'où

$$\forall k \in [\![\, 0\,;\, n \,]\!] \qquad a_k = \frac{1}{n+1}\sum_{\ell=0}^{n} \bar{\omega}^{k\ell}\mathrm{P}(\omega^\ell)$$

et on retrouve le résultat précédent.

Exercice 11 (***)

On définit $\qquad \forall x \in \mathbb{R} \smallsetminus \pi\mathbb{Z} \qquad \mathrm{cotan}\,(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$

Pour n entier non nul, on note

$$\mathrm{P}_n = (\mathrm{X}+1)^n - (\mathrm{X}-1)^n \qquad \mathrm{C}_n = \sum_{k=1}^{n-1} \mathrm{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right)^2$$

avec pour convention $\displaystyle\sum_{k=1}^{0} \ldots = 0$.

1. Pour n entier non nul, déterminer une écriture factorisée de P_n dans $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$.
2. Notant $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ les racines de P_n, déterminer le coefficient de degré $\deg(\mathrm{P}_n) - 2$ de P_n.
3. En déduire la valeur de C_n pour tout n entier non nul.

Corrigé : 1. Avec le binôme de Newton, on trouve

$$\mathrm{P}_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\mathrm{X}^{n-k} - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k\mathrm{X}^{n-k} = 2\sum_{0\leqslant 2k+1\leqslant n} \binom{n}{2k+1}\mathrm{X}^{n-(2k+1)}$$

Par suite $\qquad \boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \deg \mathrm{P}_n = n-1 \quad \text{et} \quad \alpha_n = 2n}$

2. On a $\mathrm{P}_1 = 2$. Soit $n \geqslant 2$. Le polynôme non constant P_n est scindé dans $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$ d'après le théorème de d'Alembert-Gauss. Pour $\alpha \in \mathbb{C}$, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{P}_n(\alpha) = 0 &\iff (\alpha+1)^n = (\alpha-1)^n \\ &\iff \alpha + 1 = (\alpha-1)\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{n}} \iff \alpha = \frac{\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{n}}+1}{\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{n}}-1} \quad \text{avec} \quad k \in [\![\, 1\,;\, n-1 \,]\!] \end{aligned}$$

Par une factorisation d'angle moitié, on obtient

$$\mathrm{P}_n(\alpha) = 0 \iff \alpha = -\mathrm{i}\,\mathrm{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right) \quad \text{avec} \quad k \in [\![1\,;\, n-1]\!]$$

Ainsi $$\boxed{\forall n \geqslant 2 \qquad \mathrm{P}_n = 2n \prod_{k=1}^{n-1} \left(\mathrm{X} + \mathrm{i}\,\mathrm{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)}$$

3. Soit $n \geqslant 1$. On a $$\mathrm{P}_n = 2\tbinom{n}{1}\mathrm{X}^{n-1} + 2\tbinom{n}{3}\mathrm{X}^{n-3} + \ldots$$

puis $$\left(\sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k^2 + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n-1} \gamma_i \gamma_j \iff \mathrm{C}_n = \frac{4\binom{n}{3}}{\alpha_n}$$

On conclut $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \mathrm{C}_n = \frac{(n-1)(n-2)}{3}}$$