Corrigé du devoir en temps libre n°4

Problème I

1. Pour $g \in \mathrm{G}$, on a $g(\mathrm{F}) \subset \mathrm{F}$ et $\mathrm{F} = \mathrm{Im}\ p = \mathrm{Ker}\,(\mathrm{id} - p)$ d'où $p \circ g \circ p = g \circ p$. Par suite, il vient

$$p \circ q = \frac{1}{n}\sum_{g\in\mathrm{G}} p \circ g \circ p \circ g^{-1} = \frac{1}{n}\sum_{g\in\mathrm{G}} g \circ p \circ g^{-1} = q$$

Puis, pour $g \in \mathrm{G}$, on a aussi $g^{-1} \in \mathrm{G}$ d'où $g^{-1}(\mathrm{F}) \subset \mathrm{F}$. Ainsi, pour $x \in \mathrm{E}$, on a $p(x) \in \mathrm{F}$ puis $g^{-1} \circ p(x) \in \mathrm{F} = \mathrm{Ker}\,(\mathrm{id} - p)$ d'où

$$q \circ p(x) = \frac{1}{n}\sum_{g\in\mathrm{G}} g \circ p \circ g^{-1} \circ p(x) = \frac{1}{n}\sum_{g\in\mathrm{G}} g \circ g^{-1} \circ p(x) = p(x)$$

Ainsi $\boxed{p \circ q = q \quad \text{et} \quad q \circ p = p}$

2. On a $q \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ puis

$$q^2 = q \circ q = q \circ (p \circ q) = (q \circ p) \circ q = p \circ q = q$$

Ainsi $\boxed{\text{L'endomorphisme } q \text{ est un projecteur.}}$

3. Soit $x \in \mathrm{E}$. On a $$q(x) = \frac{1}{n}\sum_{g\in\mathrm{G}} g\,\underbrace{\left(p \circ g^{-1}(x)\right)}_{\in \mathrm{Im}\ p = \mathrm{F}} \in \mathrm{F}$$

ce qui prouve $\mathrm{Im}\ q \subset \mathrm{F}$. Réciproquement, considérons $x \in \mathrm{F}$. Pour $g \in \mathrm{G}$, on a $g^{-1} \in \mathrm{G}$ d'où $g^{-1}(\mathrm{F}) \subset \mathrm{F}$ puis

$$q(x) = \frac{1}{n}\sum_{g\in\mathrm{G}} g \circ p \underbrace{\left(g^{-1}(x)\right)}_{\in \mathrm{F} = \mathrm{Ker}\,(\mathrm{id} - p)} = \frac{1}{n}\sum_{g\in\mathrm{G}} g \circ g^{-1}(x) = x$$

ce qui prouve $\mathrm{F} \subset \mathrm{Ker}\,(\mathrm{id} - q) = \mathrm{Im}\ q$ et on conclut

$$\boxed{\mathrm{Im}\ q = \mathrm{F}}$$

4. Soit $x \in \mathrm{Ker}\ q$ et $h \in \mathrm{G}$. On a

$$\begin{aligned} q(h(x)) = \frac{1}{n}\sum_{g\in\mathrm{G}} g \circ p \circ g^{-1} \circ h(x) &= \frac{1}{n}\sum_{g\in\mathrm{G}} g \circ p \circ (h^{-1} \circ g)^{-1}(x) \\ &= h \circ \frac{1}{n}\sum_{g\in\mathrm{G}} (h^{-1} \circ g) \circ p \circ (h^{-1} \circ g)^{-1}(x) \end{aligned}$$

Or, l'application $g \mapsto h^{-1} \circ g$ réalise une permutation de G d'où

$$q(h(x)) = h \circ \frac{1}{n}\sum_{g\in\mathrm{G}} g \circ p \circ g^{-1}(x) = h(q(x)) = h(0_{\mathrm{E}}) = 0_{\mathrm{E}}$$

ce qui prouve $h(x) \in \mathrm{Ker}\ q$ ce pour tout $h \in \mathrm{G}$. Et comme q est un projecteur, on a

$$\mathrm{E} = \mathrm{Im}\ q \oplus \mathrm{Ker}\ q$$

On conclut

$$\boxed{\text{Le sev Ker } q \text{ est un supplémentaire de F stable par tout élément de G.}}$$

Problème II

1. L'application τ est linéaire de $\mathbb{R}_n[X]$ dans lui même et on a

$$\forall j \in [\![0\,;\, n]\!] \qquad \tau(X^j) = (X+1)^j = \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} X^i$$

D'où
$$\boxed{T = \operatorname{mat}_{\mathscr{C}} \tau = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{0} & \dots & \binom{n}{0} \\ 0 & \binom{1}{1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \binom{n}{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & \binom{n}{n} \end{pmatrix}}$$

2. L'application $P(X) \mapsto P(X-1)$ est clairement réciproque de l'application τ et on a

$$\forall j \in [\![0\,;\, n]\!] \qquad \tau^{-1}(X^j) = (X-1)^j = \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} (-1)^{j-i} X^i$$

Ainsi
$$\boxed{\tau \in GL(\mathbb{R}_n[X]) \quad \text{et} \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} (-1)^0\binom{0}{0} & (-1)^1\binom{1}{0} & \dots & (-1)^n\binom{n}{0} \\ 0 & (-1)^0\binom{1}{1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & (-1)^1\binom{n}{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & (-1)^0\binom{n}{n} \end{pmatrix}}$$

3. Choisir une application de $[\![1\,;\, n]\!]$ dans $[\![1\,;\, p]\!]$ équivaut à choisir la taille de l'ensemble image, c'est-à-dire un entier $k \in [\![0\,;\, p]\!]$, puis les k éléments de l'image avec $\binom{p}{k}$ façons de faire ce choix et une surjection de $[\![1\,;\, n]\!]$ sur cet ensemble. Notant $\mathscr{S}(E, F)$ les surjections de E sur F, on a

$$[\![1\,;\, p]\!]^{[\![1\,;\, n]\!]} = \bigsqcup_{k=0}^{p} \ \bigsqcup_{Y \subset [\![1\,;\, p]\!], \operatorname{Card}(Y) = k} \underbrace{\mathscr{S}([\![1\,;\, n]\!], Y)}_{\operatorname{Card} = S_{n,k}}$$

Ainsi
$$\boxed{p^n = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} S_{n,k}}$$

4. On note U et V les colonnes de $\mathscr{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$ dont les coordonnées sont respectivement les u_i et les v_i. On a $V = T^{\top} U$ et par suite $U = {T^{-1}}^{\top} V$ d'où

$$\boxed{\forall k \in [\![0\,;\, n]\!] \qquad v_k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} u_i \quad \text{et} \quad u_k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} v_i}$$

5. Il s'agit de *l'inversion de Pascal*. Soit $U \in \mathscr{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$. On a $U = T^{-1} T U$ d'où

$$\forall k \in [\![0\,;\, n]\!] \qquad u_k = \sum_{\ell=0}^{k} (-1)^{k-\ell} \binom{k}{\ell} \sum_{p=0}^{\ell} \binom{\ell}{p} u_p$$

Ainsi, avec $u_k = S_{n,k}$ pour $k \in [\![0\,;\, n]\!]$, on trouve

$$S_{n,k} = \sum_{\ell=0}^{k} (-1)^{k-\ell} \binom{k}{\ell} \underbrace{\sum_{p=0}^{\ell} \binom{\ell}{p} S_{n,p}}_{= \ell^n}$$

D'où
$$\boxed{\forall k \in [\![0\,;\, n]\!] \qquad S_{n,k} = \sum_{\ell=0}^{k} (-1)^{k-\ell} \binom{k}{\ell} \ell^n}$$

Problème III

1. On note $\mathrm{P} = a_n \prod_{i=1}^{n} (\mathrm{X} - x_i)$ avec $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ et on pose $x_0 = -\infty$ et $x_{n+1} = +\infty$. Soit $i \in [\![0\,;\, n]\!]$. Pour $x \in \,]\, x_i\,;\, x_{i+1}\,[$, il vient par dérivation

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\ln|\mathrm{P}(x)|\right] = \frac{\mathrm{P}'(x)}{\mathrm{P}(x)}$$

Or, on a
$$\frac{\mathrm{P}'}{\mathrm{P}} = \frac{1}{a_n \prod_{i=1}^{n}(\mathrm{X}-x_i)}\left(a_n \sum_{k=1}^{n} \prod_{i \in [\![1\,;\, n]\!] \smallsetminus \{k\}} (\mathrm{X} - x_i)\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\mathrm{X} - x_k}$$

D'où
$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left[\ln|\mathrm{P}(x)|\right] = -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(x - x_k)^2} \leqslant 0$$

On conclut

$$\boxed{\text{La fonction } x \mapsto \ln|\mathrm{P}(x)| \text{ est concave sur chaque intervalle du domaine de définition.}}$$

2. On a

$$\forall i \in [\![0\,;\, n]\!] \qquad \forall x \in \,]\, x_i\,;\, x_{i+1}\,[\qquad \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left[\ln|\mathrm{P}(x)|\right] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{\mathrm{P}'(x)}{\mathrm{P}(x)}\right] = \frac{\mathrm{P}''(x)\mathrm{P}(x) - \mathrm{P}'(x)^2}{\mathrm{P}(x)^2}$$

Par concavité de $x \mapsto \ln|\mathrm{P}(x)|$ sur chaque intervalle de définition, il vient

$$\forall i \in [\![0\,;\, n]\!] \qquad \forall x \in \,]\, x_i\,;\, x_{i+1}\,[\qquad \mathrm{P}''(x)\mathrm{P}(x) \leqslant \mathrm{P}'(x)^2$$

L'inégalité vaut trivialement en les x_i et on conclut

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{P}''(x)\mathrm{P}(x) \leqslant \mathrm{P}'(x)^2}$$

D'après le théorème de Rolle, on dispose pour $i \in [\![1\,;\, n-1]\!]$ de $y_i \in \,]\, x_i\,;\, x_{i+1}\,[$ tel que $\mathrm{P}'(y_i) = 0$. On a $x_1 < y_2 < x_2 < \ldots < y_{n-1} < x_n$ ce qui prouve que P' est scindé à racines simples puisque $\deg \mathrm{P}' = n - 1$. Une récurrence immédiate prouve que $\mathrm{P}^{(k)}$ est scindé à racines simples pour tout $k \in [\![0\,;\, n-1]\!]$. En appliquant le résultat précédemment établi à $\mathrm{P}^{(k)}$ pour $k \in [\![0\,;\, n-1]\!]$, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{P}^{(k+2)}(x)\mathrm{P}^{(k)}(x) \leqslant \mathrm{P}^{(k+1)}(x)^2$$

Enfin, on observe que le résultat est immédiat pour $k \geqslant n$ puisque $\mathrm{P}^{(n+2)} = 0$ et on conclut

$$\boxed{\forall (x,k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N} \qquad \mathrm{P}^{(k+2)}(x)\mathrm{P}^{(k)}(x) \leqslant \mathrm{P}^{(k+1)}(x)^2}$$

3. Soit $k \in [\![1\,;\, n-1]\!]$. D'après ce qui précède, on a

$$\mathrm{P}^{(k-1)}(0)\mathrm{P}^{(k+1)}(0) \leqslant \mathrm{P}^{(k)}(0)^2$$

autrement dit
$$(k-1)!(k+1)!a_{k-1}a_{k+1} \leqslant k!a_k^2$$

d'où
$$a_{k-1}a_{k+1} \leqslant \frac{k}{k+1}a_k^2 \quad \text{et} \quad \frac{k}{k+1} \leqslant 1$$

On conclut
$$\boxed{\forall k \in [\![1\,;\, n-1]\!] \qquad a_{k-1}a_{k+1} \leqslant a_k^2}$$

Remarque : En fait, on peut faire mieux et montrer

$$\forall k \in [\![1\,;\, n-1]\!] \qquad (k+1)a_{k-1}a_{k+1} < ka_k^2$$

en utilisant la stricte convexité de $x \mapsto \ln|\mathrm{P}(x)|$. On lit notamment dans l'inégalité finale que deux coefficients consécutifs ne peuvent être nuls. D'ailleurs, c'est pour établir le caractère strict qu'on a réellement besoin d'un polynôme scindé à racines simples. Pour une inégalité large, un polynôme scindé suffit.