RÉDUCTION

B. Landelle

Table des matières

Dans ce chapitre, l'ensemble E désigne un $\mathbb{K}$-ev non nul avec $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Polynôme d'endomorphisme ou de matrice

Dans cette partie, toutes les définitions et propriétés peuvent être énoncées à l'identique pour $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ ou $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On se contentera, sauf cas particuliers, des énoncés vectoriels avec $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$.

1 Définitions

Définition 1. *Soit* $\mathrm{P}=\sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k \mathrm{X}^k \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$. *Pour* $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$, *on définit le* polynôme d'endomorphisme $\mathrm{P}(u) \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ *par*

$$\mathrm{P}(u)=\sum_{k=0}^{+\infty} a_k u^k$$

avec $u^0=\mathrm{id}$ *et* $u^{k+1}=u^k \circ u$ *pour* k *entier.*

Remarque : Si E est de dimension finie et $\mathscr{B}$ une base de E, on a $\operatorname{mat}_{\mathscr{B}} \mathrm{P}(u)=\mathrm{P}(\operatorname{mat}_{\mathscr{B}} u)$. En effet, l'application $\varphi: \mathscr{L}(\mathrm{E}) \rightarrow \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), u \mapsto \operatorname{mat}_{\mathscr{B}} u$ avec $n=\operatorname{dim} \mathrm{E}$ est un morphisme d'algèbres d'où $\varphi(\mathrm{P}(u))=\mathrm{P}(\varphi(u))$.

Proposition 1. *Soient* $\mathrm{D}=\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ *avec les* λ_i *dans* $\mathbb{K}$ *et* $\mathrm{T}=\mathrm{D}+\mathrm{N}$ *avec* $\mathrm{N} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ *triangulaire supérieure stricte. Pour* $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$, *on a*

$$\mathrm{P}(\mathrm{D})=\operatorname{diag}(\mathrm{P}(\lambda_1), \ldots, \mathrm{P}(\lambda_n)) \quad \textit{et} \quad \mathrm{P}(\mathrm{T})=\mathrm{P}(\mathrm{D})+\mathrm{Q}$$

avec $\mathrm{Q} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ *triangulaire supérieure stricte.*

Démonstration. Soient u et v dans $\mathscr{L}(\mathbb{K}^n)$ respectivement canoniquement associés à D et T. On note $\mathscr{C}=(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Soit $i \in [\![1 ; n]\!]$. Une récurrence immédiate donne $u^k(e_i)=\lambda_i^k e_i$ pour tout k entier. On note $\mathrm{F}_i=\operatorname{Vect}(e_1, \ldots, e_i)$ pour $i \in [\![1 ; n]\!]$ et on observe $v(\mathrm{F}_i) \subset \mathrm{F}_i$ pour tout $i \in [\![1 ; n]\!]$. Soit k entier. Pour $i \in [\![1 ; n]\!]$, supposant $v^k(e_i)=\lambda_i^k e_i+b_{i, k}$ avec $b_{i, k} \in \mathrm{F}_{i-1}$, il vient

$$v^{k+1}(e_i)=\lambda_i v(e_i)+\underbrace{v(b_{i, k})}_{\in \mathrm{F}_{i-1}}=\lambda_i^{k+1} e_i+b_{i, k+1} \quad \text{avec} \quad b_{i, k+1} \in \mathrm{F}_{i-1}$$

ce qui clôt la récurrence. Le résultat suit pour $\mathrm{P}(u)$ et $\mathrm{P}(v)$ avec $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ par combinaison linéaire. □

Définition 2. *Soit* $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$. *Pour* $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$, *on dit que* P *est* annulateur *de* u *si* $\mathrm{P}(u)=0$.

Définition 3. *Soient* u, v *dans* $\mathscr{L}(\mathrm{E})$. *On dit que* v *est un polynôme en* u *s'il existe* $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ *tel que* $v=\mathrm{P}(u)$. *On note*

$$\mathbb{K}[u]=\{\mathrm{P}(u), \mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]\}$$

2 L'algèbre $\mathbb{K}[u]$

Proposition 2. *Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. L'application $\varphi : \mathbb{K}[\mathrm{X}] \to \mathscr{L}(\mathrm{E}), \mathrm{P} \mapsto \mathrm{P}(u)$ est un morphisme d'algèbres.*

Démonstration. On a $\varphi(1) = \mathrm{id}$. Soient P, Q dans $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On note $\mathrm{P} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \mathrm{X}^k$ et $\mathrm{Q} = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k \mathrm{X}^k$. On a

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda\mathrm{P}+\mathrm{Q}) &= (\lambda\mathrm{P}+\mathrm{Q})(u) = \left(\sum_{k=0}^{+\infty}(\lambda a_k + b_k)\mathrm{X}^k\right)(u) = \sum_{k=0}^{+\infty}(\lambda a_k + b_k)u^k \\ &= \lambda\sum_{k=0}^{+\infty} a_k u^k + \sum_{k=0}^{+\infty} b_k u^k = \lambda\mathrm{P}(u) + \mathrm{Q}(u) = \lambda\varphi(\mathrm{P}) + \varphi(\mathrm{Q})\end{aligned}$$

Puis, avec $\mathrm{PQ} = \sum_{(k,\ell)\in\mathbb{N}^2} a_k b_\ell \mathrm{X}^{k+\ell}$, on a

$$\begin{aligned}\varphi(\mathrm{PQ}) &= \varphi\left(\sum_{(k,\ell)\in\mathbb{N}^2} a_k b_\ell \mathrm{X}^{k+\ell}\right) = \left(\sum_{(k,\ell)\in\mathbb{N}^2} a_k b_\ell \mathrm{X}^{k+\ell}\right)(u) \\ &= \sum_{(k,\ell)\in\mathbb{N}^2} a_k b_\ell u^{k+\ell} = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k u^k\right)\circ\left(\sum_{\ell=0}^{+\infty} b_\ell u^\ell\right) = \mathrm{P}(u)\circ\mathrm{Q}(u) = \varphi(\mathrm{P})\circ\varphi(\mathrm{Q})\end{aligned}$$

d'où le résultat. □

Théorème 1. *Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. L'ensemble $\mathbb{K}[u]$ est une sous-algèbre commutative de $\mathscr{L}(\mathrm{E})$.*

Démonstration. L'ensemble $\mathbb{K}[u]$ est l'image du morphisme d'algèbres $\mathbb{K}[\mathrm{X}] \to \mathscr{L}(\mathrm{E}), \mathrm{P} \mapsto \mathrm{P}(u)$ avec $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ commutative. C'est par conséquent une sous-algèbre commutative de $\mathscr{L}(\mathrm{E})$. □

Théorème 2. *Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. L'ensemble des polynômes annulateurs de u est un idéal de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$.*

Démonstration. L'ensemble des polynômes annulateurs de u est le noyau du morphisme d'algèbres $\mathbb{K}[\mathrm{X}] \to \mathscr{L}(\mathrm{E}), \mathrm{P} \mapsto \mathrm{P}(u)$. □

3 Lemme de décomposition des noyaux

Théorème 3. *Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ et P, Q dans $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$. Si P et Q sont premiers entre eux, alors*

$$\mathrm{Ker}\,(\mathrm{PQ})(u) = \mathrm{Ker}\ \mathrm{P}(u) \oplus \mathrm{Ker}\ \mathrm{Q}(u)$$

Démonstration. D'après le théorème de Bézout, il existe U, V dans $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ tels que $\mathrm{UP} + \mathrm{VU} = 1$ d'où

$$\mathrm{id} = \mathrm{U}(u)\circ\mathrm{P}(u) + \mathrm{V}(u)\circ\mathrm{Q}(u)$$

Soit $x \in \mathrm{Ker}\ \mathrm{P}(u) \cap \mathrm{Ker}\ \mathrm{Q}(u)$. Il vient

$$\mathrm{P}(u)(x) = \mathrm{Q}(u)(x) = 0 \quad\Longrightarrow\quad \underbrace{[\mathrm{U}(u)\circ\mathrm{P}(u) + \mathrm{V}(u)\circ\mathrm{Q}(u)]}_{=\mathrm{id}}(x) = x = 0$$

Puis, soit $x \in \mathrm{Ker}\,(\mathrm{PQ})(u)$. On a

$$x = \mathrm{id}\,(x) = \mathrm{U}(u)\circ\mathrm{P}(u)(x) + \mathrm{V}(u)\circ\mathrm{Q}(u)(x)$$

$$\mathrm{P}(u)\circ[\mathrm{V}(u)\circ\mathrm{Q}(u)(x)] = \mathrm{V}(u)\circ(\mathrm{PQ})(u)(x) = 0$$

et
$$\mathrm{Q}(u)\circ[\mathrm{U}(u)\circ\mathrm{P}(u)(x)] = \mathrm{U}(u)\circ(\mathrm{PQ})(u)(x) = 0$$

d'où
$$\mathrm{Ker}\,(\mathrm{PQ})(u) \subset \mathrm{Ker}\ \mathrm{P}(u) \oplus \mathrm{Ker}\ \mathrm{Q}(u)$$

Soit $x = x_1 + x_2$ avec $(x_1, x_2) \in \mathrm{Ker}\ \mathrm{P}(u) \times \mathrm{Ker}\ \mathrm{Q}(u)$. On a

$$(\mathrm{PQ})(u)(x) = \mathrm{P}(u)\circ\mathrm{Q}(u)(x_1) + \mathrm{Q}(u)\circ\mathrm{P}(u)(x_2) = 0$$

Le résultat suit. □

Remarque : Si $(\mathrm{PQ})(u) = 0$, alors $\mathrm{E} = \mathrm{Ker}\ \mathrm{P}(u) \oplus \mathrm{Ker}\ \mathrm{Q}(u)$ et le projecteur p sur $\mathrm{Ker}\ \mathrm{P}(u)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\ \mathrm{Q}(u)$ est dans $\mathbb{K}[u]$. En effet, le calcul précédent montre que $p = (\mathrm{VQ})(u)$.

Théorème 4. *Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ et $\mathrm{P}_1 \ldots, \mathrm{P}_n$ dans $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$. Si $\mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_n$ sont premiers entre eux deux à deux, alors*

$$\mathrm{Ker}\left(\prod_{k=1}^{n} \mathrm{P}_k\right)(u) = \bigoplus_{k=1}^{n} \mathrm{Ker}\ \mathrm{P}_k(u)$$

Démonstration. On procède par récurrence en utilisant $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \mathrm{P}_k \wedge \mathrm{P}_n = 1$. □

Exemple : Soit E un $\mathbb{R}$-ev et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ tel que $f^3 = \mathrm{id}$. Montrer

$$\mathrm{E} = \mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{id}) \oplus \mathrm{Im}\,(f - \mathrm{id})$$

Avec la factorisation $\mathrm{X}^3 - 1 = (\mathrm{X} - 1)(\mathrm{X}^2 + \mathrm{X} + 1)$ dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$, on trouve

$$\mathrm{E} = \mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{id}) \oplus \mathrm{Ker}\,(f^2 + f + \mathrm{id})$$

Reste à comparer $\mathrm{Ker}\,(f^2 + f + \mathrm{id})$ et $\mathrm{Im}\,(f - \mathrm{id})$. D'après la relation de Bézout, il existe A, B dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ tel que $\mathrm{A}(\mathrm{X}-1) + \mathrm{B}(\mathrm{X}^2+\mathrm{X}+1) = 1$ d'où $\mathrm{id} = (f - \mathrm{id})\circ\mathrm{A}(f) + \mathrm{B}(f)\circ(f^2 + f + \mathrm{id})$. Pour $x \in \mathrm{Ker}\,(f^2 + f + \mathrm{id})$, il s'ensuit $x \in \mathrm{Im}\,(f - \mathrm{id})$ et l'inclusion réciproque est facile.

II Éléments propres

1 Définition

Définition 4. *Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. Le scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est appelé* valeur propre *de u s'il existe $x \in \mathrm{E}$ non nul tel que*

$$u(x) = \lambda x$$

Remarque : Sans la précision non nul, la définition serait creuse puisque $u(0_\mathrm{E}) = \lambda 0_\mathrm{E}$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$.

Définition 5. *Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. Un vecteur x de E non nul est appelé* vecteur propre *de u s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que*

$$u(x) = \lambda x$$

Vocabulaire : On dit que x est vecteur propre de u associé à la valeur propre λ.

Avertissement : Si on a $u(x) = \lambda x$ avec $x \in \mathrm{E}$, on ne peut parler de vecteur propre qu'à condition d'avoir vérifié que x est non nul.

Exemples : 1. Dans $\mathrm{E} = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, l'application $\mathrm{D} : f \mapsto f'$ est un endomorphisme pour $f_\lambda : x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda x}$, on a $\mathrm{D}(f_\lambda) = \lambda f_\lambda$ avec $f_\lambda \neq 0$.
2. Dans $\mathrm{E} = \mathbb{K}^2$, soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ défini par $u(x, y) = (x + y, x + y)$ pour tout $(x, y) \in \mathrm{E}$. On a $u(1, -1) = (0, 0) = 0 \cdot (1, -1)$ d'où $(1, -1)$ vecteur propre associé à la valeur propre 0.
3. Dans $\mathrm{E} = \mathbb{R}^2$, soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ défini par $u(x, y) = (-y, x)$ pour tout $(x, y) \in \mathrm{E}$. Pour λ réel, on a

$$u(x, y) = \lambda(x, y) \iff \begin{cases} x(1 + \lambda^2) = 0 \\ y = -\lambda x \end{cases} \iff (x, y) = (0, 0)$$

L'endomorphisme u n'admet pas de vecteurs propres.

Proposition 3. *Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ et $x \in \mathrm{E}$ non nul. On a*

$$x \text{ vecteur propre de } u \iff \operatorname{Vect}(x) \text{ stable par } u$$

Démonstration. Si $u(x) = \lambda x$, alors $u(\alpha x) = \alpha \lambda x \in \operatorname{Vect}(x)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$ ce qui prouve $u(\operatorname{Vect}(x)) \subset \operatorname{Vect}(x)$. Réciproquement, on a $u(x) \in u(\operatorname{Vect}(x)) \subset \operatorname{Vect}(x)$ d'où l'existence de $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda x$. □

Exemple : Dans $\mathrm{E} = \mathbb{R}^2$, l'endomorphisme u défini par $u(x, y) = (-y, x)$ pour tout $(x, y) \in \mathrm{E}$ n'admet pas de sev stables autres que $\{0_\mathrm{E}\}$ et E.

Proposition 4. *Soient $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a*

$$\lambda \text{ valeur propre de } u \iff \operatorname{Ker}(u - \lambda \operatorname{id}) \neq \{0_\mathrm{E}\}$$

Si E est de dimension finie, on a

$$\begin{aligned} \lambda \text{ valeur propre de } u &\iff u - \lambda \operatorname{id} \notin \mathrm{GL}(\mathrm{E}) \\ &\iff \det(\lambda \operatorname{id} - u) = 0 \iff \dim \operatorname{Ker}(u - \lambda \operatorname{id}) \geqslant 1 \end{aligned}$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} \lambda \text{ valeur propre de } u &\iff \exists x \in \mathrm{E} \setminus \{0_\mathrm{E}\} \mid (u - \lambda \operatorname{id})(x) = 0_\mathrm{E} \\ &\iff \operatorname{Ker}(u - \lambda \operatorname{id}) \neq \{0_\mathrm{E}\} \end{aligned}$$

En dimension finie, on sait que pour $g \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$, on a

$$\operatorname{Ker} g = \{0_\mathrm{E}\} \iff g \in \mathrm{GL}(\mathrm{E}) \iff \det g \neq 0$$

D'où par négation

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker}(u - \lambda \operatorname{id}) \neq \{0_\mathrm{E}\} &\iff \dim \operatorname{Ker}(u - \lambda \operatorname{id}) \geqslant 1 \\ &\iff u - \lambda \operatorname{id} \notin \mathrm{GL}(\mathrm{E}) \iff \det(\lambda \operatorname{id} - u) = 0 \end{aligned}$$

□

Remarque : En particulier, on a

$$0 \text{ valeur propre de } u \iff \operatorname{Ker} u \neq \{0_\mathrm{E}\} \iff u \text{ non injectif}$$

Et en dimension finie, on a $\quad 0 \text{ valeur propre de } u \iff \det u = 0$

Définition 6. *Soit* $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$*. On appelle* sous-espace propre *de* u *associé à la valeur propre* λ *le sev de* E *noté* $\mathrm{E}_\lambda(u)$ *défini par*

$$\mathrm{E}_\lambda(u) = \mathrm{Ker}\,(u - \lambda\,\mathrm{id}\,)$$

Remarque : Les vecteurs propres de u pour la valeur propre λ sont les éléments de $\mathrm{E}_\lambda(u) \smallsetminus \{0_\mathrm{E}\}$.

Exemples : 1. Pour $u = \lambda\,\mathrm{id}$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$ (homothétie), on a λ unique valeur propre de u et $\mathrm{E}_\lambda(u) = \mathrm{E}$.
2. Soit p un projecteur de E avec $\mathrm{Im}\,p$ et $\mathrm{Ker}\,p$ non réduits à $\{0_\mathrm{E}\}$. Alors 0 et 1 sont valeurs propres de p et $\mathrm{E}_0(p) = \mathrm{Ker}\,p$ et $\mathrm{E}_1(p) = \mathrm{Ker}\,(p - \mathrm{id}\,) = \mathrm{Im}\,p$.
3. Dans $\mathrm{E} = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, pour λ réel, on a $\mathrm{E}_\lambda(\mathrm{D}) = \mathrm{Vect}\,(x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda x})$ (résolution d'une EDL(1)).

Proposition 5. *Soit* $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ *et* $x \in \mathrm{E}$ *tel que* $u(x) = \lambda x$ *avec* $\lambda \in \mathbb{K}$*. Alors*

$$\forall \mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}] \qquad \mathrm{P}(u)(x) = \mathrm{P}(\lambda)x$$

Démonstration. Par récurrence immédiate, on a $u^k(x) = \lambda^k x$ pour k entier puis, pour $\mathrm{P} = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k \mathrm{X}^k$, il vient

$$\mathrm{P}(u)(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k u^k(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \lambda^k x = \mathrm{P}(\lambda)x$$

□

Proposition 6. *Soit* $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ *et* $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$*. Si* λ *valeur propre de* u*, alors* $\mathrm{P}(\lambda)$ *est valeur propre de* $\mathrm{P}(u)$*.*

Démonstration. Soit λ valeur propre de u et x vecteur propre associé. On a $\mathrm{P}(u)(x) = \mathrm{P}(\lambda)x$ d'où $\mathrm{P}(\lambda)$ valeur propre de $\mathrm{P}(u)$. □

Proposition 7. *Soit* $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ *et* $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ *annulateur de* u*. Alors, les valeurs propres de* u *sont parmi les racines de* P*.*

Démonstration. Soit λ valeur propre de u et x vecteur propre associé. Pour P annulateur de u, on a $\mathrm{P}(u)(x) = 0 = \mathrm{P}(\lambda)x$ avec $x \neq 0_\mathrm{E}$ d'où $\mathrm{P}(\lambda) = 0$. □

2 Propriétés

Proposition 8. *Soient* u, v *dans* $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ *tels que* $u \circ v = v \circ u$*. Alors* $\mathrm{Im}\,u$ *et* $\mathrm{Ker}\,u$ *sont stables par* v*.*

Démonstration. Soit $x \in \mathrm{Im}\,u$. Il existe $t \in \mathrm{E}$ tel que $x = u(t)$. D'où $v(x) = v \circ u(t) = u \circ v(t) \in \mathrm{Im}\,u$. De même soit $x \in \mathrm{Ker}\,u$. On a $u \circ v(x) = v \circ u(x) = v(u(x)) = v(0_\mathrm{E}) = 0_\mathrm{E}$ d'où $v(x) \in \mathrm{Ker}\,u$. □

Proposition 9. *Soit* $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ *et* λ *valeur propre de* u*. Alors* $\mathrm{E}_\lambda(u)$ *est stable par* u *et l'endomorphisme induit* $u_{\mathrm{E}_\lambda(u)}$ *est* $\lambda\,\mathrm{id}_{\,\mathrm{E}_\lambda(u)}$*.*

Démonstration. C'est une conséquence de la proposition 8 appliquée avec u et $u - \lambda\,\mathrm{id}$. De plus, on a

$$x \in \mathrm{E}_\lambda(u) \iff (u - \lambda\,\mathrm{id}\,)(x) = 0 \iff u(x) = \lambda x$$

ce qui prouve le résultat attendu. □

Théorème 5. *Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ des valeurs propres de u deux à deux distinctes. On a*
$$\sum_{i=1}^{p} \mathrm{E}_{\lambda_i}(u) = \bigoplus_{i=1}^{p} \mathrm{E}_{\lambda_i}(u)$$

Démonstration. Soit $(x_j)_{1 \leqslant j \leqslant p} \in \prod_{j=1}^{p} \mathrm{E}_{\lambda_j}(u)$ tel que $\sum_{j=1}^{p} x_j = 0$. Soit $(\mathrm{L}_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ la famille de polynômes de Lagrange associés aux $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$. On a $\mathrm{L}_i(\lambda_j) = \delta_{i,j}$ pour tout $(i, j) \in [\![1 ; p]\!]^2$. Il vient
$$\forall i \in [\![1 ; p]\!] \qquad \mathrm{L}_i(u) \left(\sum_{j=1}^{p} x_j \right) = \sum_{j=1}^{p} \mathrm{L}_i(u)(x_j) = \sum_{j=1}^{p} \mathrm{L}_i(\lambda_j) x_j = x_i = 0$$
□

Remarque : On peut aussi procéder par récurrence mais c'est moins joli.

Corollaire 1. *Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. Une famille de vecteurs propres de u associés à des valeurs propres deux à deux distinctes de u est une famille libre.*

Démonstration. Soit $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ famille de vecteurs propres de u associés aux valeurs propres deux à deux distinctes $\lambda_1, \ldots \lambda_p$ et $\alpha_1, \ldots \alpha_p$ des scalaires tels que $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i x_i = 0_{\mathrm{E}}$. On a $\alpha_i x_i \in \mathrm{E}_{\lambda_i}(u)$ pour tout $i \in [\![1 ; p]\!]$ d'où par caractérisation d'une somme directe
$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i x_i = 0_{\mathrm{E}} \quad \Longrightarrow \quad \forall i \in [\![1 ; p]\!] \qquad \alpha_i x_i = 0_{\mathrm{E}} \quad \Longrightarrow \quad \forall i \in [\![1 ; p]\!] \qquad \alpha_i = 0$$
par non nullité des vecteurs propres x_i. □

Exemple : Dans $\mathrm{E} = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\mathrm{D} : f \to f'$, notant $f_\lambda : x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda x}$, pour $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ deux à deux distincts, on a $(f_{\lambda_1}, \ldots, f_{\lambda_p})$ libre.

3 Point de vue matriciel

Définition 7. *Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Le scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est appelé* valeur propre *de* A *s'il existe $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$ tel que $\mathrm{AX} = \lambda \mathrm{X}$.*

Exemple : Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. On a 0 et 2 valeurs propres de A.

Définition 8. *Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle* sous-espace propre *de* A *associé à la valeur propre λ le sev de $\mathbb{K}^n$ noté $\mathrm{E}_\lambda(\mathrm{A})$ défini par*
$$\begin{aligned} \mathrm{E}_\lambda(\mathrm{A}) &= \mathrm{Ker}\,(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}_n) \\ &= \mathrm{E}_\lambda(u) = \mathrm{Ker}\,(u - \lambda\,\mathrm{id}\,) \end{aligned}$$
où $u \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^n)$ désigne l'endomorphisme canoniquement associé à A.

Toutes les définitions et propriétés des parties II.1 et II.2 peuvent être reformulées avec un point de vue matriciel. Par exemple :

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On a
$$\boxed{\lambda \text{ valeur propre de A} \iff \mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}_n \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \det(\lambda \mathrm{I}_n - \mathrm{A}) = 0}$$

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ des valeurs propres deux à deux distinctes de A. On a

$$\boxed{\sum_{i=1}^{p} \mathrm{E}_{\lambda_i}(\mathrm{A}) = \bigoplus_{i=1}^{p} \mathrm{E}_{\lambda_i}(\mathrm{A})}$$

Avertissement : Dans tout ce qui suit, on suppose E de <u>dimension finie</u> non nulle notée $\dim \mathrm{E} = n$.

III Polynôme caractéristique

1 Définition

Proposition 10. *Soit* $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. *L'application définie sur* $\mathbb{K}$ *par* $\lambda \mapsto \det(\lambda \mathrm{I}_n - \mathrm{A})$ *est polynomiale.*

Démonstration. On a

$$\det(\lambda \mathrm{I}_n - \mathrm{A}) = \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} [\lambda \mathrm{I}_n - \mathrm{A}]_{i,\sigma(i)} = \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} \left(\lambda \delta_{i,\sigma(i)} - a_{i,\sigma(i)}\right)$$

d'où le résultat. $\square$

Définition 9. *Pour* $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, *on appelle* polynôme caractéristique *de* A *le polynôme de* $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ *noté* χ_{A} *défini par* $\chi_{\mathrm{A}} = \det(\mathrm{XI}_n - \mathrm{A})$.

Remarque : On peut manipuler $\det(\mathrm{XI}_n - \mathrm{A})$ comme un déterminant d'une matrice scalaire en considérant les coefficients à valeurs dans le corps des fractions rationnelles $\mathbb{K}(\mathrm{X})$.

Théorème 6. *Soit* $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. *On a* χ_{A} *unitaire de degré* n *et plus précisément*

$$\chi_{\mathrm{A}} = \mathrm{X}^n - \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A})\mathrm{X}^{n-1} + \ldots + (-1)^n \det(\mathrm{A})$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}\det(\mathrm{XI}_n - \mathrm{A}) &= \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} [\mathrm{XI}_n - \mathrm{A}]_{i,\sigma(i)} = \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} \left(\mathrm{X}\delta_{i,\sigma(i)} - a_{i,\sigma(i)}\right) \\ &= \prod_{i=1}^{n} (\mathrm{X} - a_{i,i}) + \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n \smallsetminus \{\mathrm{id}\}} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} (\mathrm{X}\delta_{i,\sigma(i)} - a_{i,\sigma(i)})\end{aligned}$$

Pour $\sigma \neq \mathrm{id}$, il existe $i_0 \in [\![1 \,;\, n]\!]$ tel que $\sigma(i_0) \neq i_0$ et également $\sigma^2(i_0) \neq \sigma(i_0)$ par injectivité de σ d'où

$$\prod_{i=1}^{n} \left(\mathrm{X}\delta_{i,\sigma(i)} - a_{i,\sigma(i)}\right) = a_{i_0,\sigma(i_0)} a_{\sigma(i_0),\sigma^2(i_0)} \prod_{i \in [\![1\,;\,n]\!] \smallsetminus \{i_0, \sigma(i_0)\}} \left(\mathrm{X}\delta_{i,\sigma(i)} - a_{i,\sigma(i)}\right)$$

qui est de degré $\leqslant n-2$. Ainsi, les termes de degré n et $n-1$ sont ceux de $\prod_{i=1}^{n} (\mathrm{X} - a_{i,i}) = \mathrm{X}^n - \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} \mathrm{X}^{n-1} + \ldots$. Pour le terme constant, on a $\chi_{\mathrm{A}}(0) = \det(-\mathrm{A}) = (-1)^n \det(\mathrm{A})$ ce qui clôt la preuve. $\square$

Exemples : 1. Calcul de χ_{J} avec $\mathrm{J}=\begin{pmatrix}1\end{pmatrix}$. Faisant $\mathrm{C}_1 \leftarrow \sum_{i=1}^{n} \mathrm{C}_i$ puis après factorisation $\mathrm{C}_j \leftarrow \mathrm{C}_j + \mathrm{C}_1$, on trouve

$$\chi_{\mathrm{J}} = (\mathrm{X}-n)\begin{vmatrix} 1 & -1 & \dots & -1 \\ 1 & \mathrm{X}-1 & \dots & -1 \\ \vdots & & & \end{vmatrix} = (\mathrm{X}-n)\mathrm{X}^{n-1}$$

2. Calcul de $\mathrm{P}_n = \chi_{\mathrm{A}_n}$ avec $\mathrm{A}_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & \ddots & \ddots & \end{pmatrix}$ On trouve $\mathrm{P}_n = \mathrm{XP}_{n-1} - \mathrm{P}_{n-2}$ (on complète la suite avec $\mathrm{P}_0 = 1$ et $\mathrm{P}_1 = \mathrm{X}$ pour que la relation soit compatible en $n=2$ et 3). Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, la suite $(\mathrm{P}_n(\lambda))_n$ est récurrente linéaire d'ordre 2.

Proposition 11. *Soient* A,B *dans* $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ *semblables. Alors* $\chi_{\mathrm{A}} = \chi_{\mathrm{B}}$.

Démonstration. On a $\mathrm{A} = \mathrm{PBP}^{-1}$ avec $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Il vient

$$\chi_{\mathrm{A}} = \det(\mathrm{XI}_n - \mathrm{A}) = \det(\mathrm{P}(\mathrm{XI}_n - \mathrm{B})\mathrm{P}^{-1}) = \det(\mathrm{P})\det(\mathrm{XI}_n - \mathrm{B})\det(\mathrm{P}^{-1}) = \chi_{\mathrm{B}}$$

□

Définition 10. *Pour* $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$, *on appelle* polynôme caractéristique *de* u *le polynôme de* $\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$ *noté* χ_u *défini par* $\chi_u = \chi_{\mathrm{A}}$ *avec* $\mathrm{A} = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}} u$ *et* $\mathscr{B}$ *une base de* E.

Remarque : Ceci est bien défini puisque χ_u est indépendant du choix d'une base d'après la proposition précédente.

Proposition 12. *Soit* $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. *On a*

$$\chi_u = \mathrm{X}^n - \mathrm{Tr}\,(u)\mathrm{X}^{n-1} + \ldots + (-1)^n \det(u)$$

Démonstration. Immédiate. □

2 Propriétés

Théorème 7. *Soient* $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$, $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}$. *On a*

$$\lambda \text{ valeur propre de } u \iff \lambda \text{ racine de } \chi_u$$

$$\lambda \text{ valeur propre de } \mathrm{A} \iff \lambda \text{ racine de } \chi_{\mathrm{A}}$$

Démonstration. On a

$$\lambda \text{ valeur propre de } u \iff \det(\lambda\,\mathrm{id} - u) = 0 \iff \lambda \text{ racine de } \chi_u$$

□

Définition 11. *Soit* $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ *(avec* E *de dimension finie). On appelle* spectre *de* u *noté* $\mathrm{Sp}\,(u)$ *l'ensemble des valeurs propres de* u.

Définition 12. *Soit* $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. *On appelle* spectre *de* A *noté* $\mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})$ *l'ensemble des valeurs propres de* A.

Remarques : (1) Une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ pouvant être vue aussi comme matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, on distingue le corps des scalaires considérés en notant $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}$ ou $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}$.
(2) Dans un $\mathbb{R}$-ev, le spectre d'un endomorphisme ou d'une matrice peut être vide. Par exemple avec $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ puisque $\chi_{\mathrm{A}} = \mathrm{X}^2 + 1$ non scindé dans $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ mais $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\mathrm{A}) = \{\pm\,\mathrm{i}\}$.

Proposition 13. *Deux matrices semblables ont même spectre.*

Démonstration. Immédiate puisqu'elles ont même polynôme caractéristique. □

Remarque : La réciproque est fausse. Avec $n \geqslant 2$, on peut considérer par exemple $\mathrm{A} = \mathrm{I}_n$ et $\mathrm{B} = \mathrm{I}_n + \mathrm{E}_{1,n}$ qui ne sont pas semblables bien que $\chi_{\mathrm{A}} = \chi_{\mathrm{B}} = (\mathrm{X} - 1)^n$.

Proposition 14. *Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$, F sev stable par u et $u_{\mathrm{F}} \in \mathscr{L}(\mathrm{F})$ l'endomorphisme induit par u sur F. Alors $\chi_{u_{\mathrm{F}}}$ divise χ_u.*

Démonstration. Dans une base $\mathscr{B}$ obtenue par complétion d'une base $\mathscr{B}_{\mathrm{F}}$ de F, on a $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} u = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \hline 0 & \mathrm{C} \end{array}\right)$ avec $\mathrm{A} = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_{\mathrm{F}}} u_{\mathrm{F}}$. Puis

$$\chi_u = \left|\begin{array}{c|c} \mathrm{XI}_r - \mathrm{A} & -\mathrm{B} \\ \hline 0 & \mathrm{XI}_s - \mathrm{C} \end{array}\right| \qquad \text{avec} \qquad r = \dim \mathrm{F} \text{ et } r + s = \dim \mathrm{E}$$

Par suite, on a $\chi_u = \chi_{\mathrm{A}} \times \chi_{\mathrm{C}}$ avec $\chi_{\mathrm{A}} = \chi_{u_{\mathrm{F}}}$. □

Proposition 15. *Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Si A est triangulaire, alors*

$$\chi_{\mathrm{A}} = \prod_{i=1}^{n} (\mathrm{X} - a_{i,i}) \quad \textit{et} \quad \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A}) = \{a_{i,i}, i \in [\![1\,;\, n]\!]\}$$

Démonstration. Supposons A triangulaire supérieure (preuve identique dans le cas triangulaire inférieure). On a

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & \dots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix} \text{ d'où } \chi_{\mathrm{A}} = \begin{vmatrix} \mathrm{X} - a_{1,1} & \dots & \dots & -a_{1,n} \\ 0 & \mathrm{X} - a_{2,2} & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \mathrm{X} - a_{n,n} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} (\mathrm{X} - a_{i,i})$$

Le spectre s'en déduit puisqu'il est constitué des racines de χ_{A}. □

Remarque : Le résultat précédent s'applique *a fortiori* à des matrices diagonales.

3 Multiplicité

Les définitions et résultats vectoriels qui suivent existent à l'identique pour des matrices.

Définition 13. *Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On dit que λ est valeur propre de u d'*ordre de multiplicité *m si λ est racine de χ_u d'ordre de multiplicité m. On note $m_\lambda(u)$ (ou plus simplement m_λ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur le choix de u) cet ordre de multiplicité.*

Vocabulaire : On dit aussi valeur propre d'ordre m ou de multiplicité m.

Remarque : Pour $\lambda \notin \mathrm{Sp}\,(u)$, on a $m_\lambda(u) = 0$.

Proposition 16. *Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. On a*

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)} m_\lambda(u) \leqslant \dim \mathrm{E} \quad \textit{et} \quad = \dim \mathrm{E} \iff \chi_u \textit{ scindé dans } \mathbb{K}[\mathrm{X}]$$

Démonstration. On a $\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)} (\mathrm{X}-\lambda)^{m_\lambda} | \chi_u$ avec égalité si χ_u est scindé. Comme $\deg \chi_u = \dim \mathrm{E}$, le résultat suit. □

Proposition 17. *Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ et $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)$. Alors*

$$1 \leqslant \dim \mathrm{E}_\lambda(u) \leqslant m_\lambda(u)$$

Démonstration. On a $\mathrm{E}_\lambda(u)$ stable par u. Notons $u_\lambda = u_{\mathrm{E}_\lambda(u)}$. On a $u_\lambda = \lambda \,\mathrm{id}_{\,\mathrm{E}_\lambda(u)}$ d'où $\chi_{u_\lambda} = (\mathrm{X}-\lambda)^{\dim \mathrm{E}_\lambda(u)}$. Comme χ_{u_λ} divise χ_u, le résultat suit. □

Remarque : Si λ est une valeur propre simple (*i.e.* d'ordre 1), alors $\dim \mathrm{E}_\lambda(u) = 1$.

Exemple : Pour $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, on a $1 \leqslant \dim \mathrm{E}_0(\mathrm{A}) = 1 < m_0(\mathrm{A}) = 2$.

4 Théorème de Cayley-Hamilton

Le résultat vectoriel qui suit existe à l'identique pour des matrices.

Théorème 8. *Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. On a $\chi_u(u) = 0$.*

Démonstration. Soit $x \in \mathrm{E} \smallsetminus \{0\}$. La famille $(x, u(x), \ldots, u^n(x))$ est liée puisqu'elle contient $n+1$ vecteurs. On pose

$$p = \max \left\{ k \in \mathbb{N}^* \mid (x, \ldots, u^{k-1}(x)) \text{ libre} \right\}$$

Cet entier p est bien défini comme maximum d'une partie de $\mathbb{N}^*$ non vide ((x) est libre) et majorée par n. Comme $(x, u(x), \ldots, u^p(x))$ est liée, il existe des scalaires $a_0, \ldots, a_{p-1}$ tels que $u^p(x) = \sum_{i=0}^{p-1} a_i u^i(x)$. En effet, on a

$$\mathrm{Vect}\,(x, u(x), \ldots, u^{p-1}(x)) \subset \mathrm{Vect}\,(x, u(x), \ldots, u^p(x))$$

et

$$(x, \ldots, u^{p-1}(x)) \text{ libre} \qquad (x, \ldots, u^p(x)) \text{ liée}$$

d'où l'égalité des dimensions et par suite

$$u^p(x) \in \mathrm{Vect}\,(x, \ldots u^p(x)) = \mathrm{Vect}\,(x, \ldots, u^{p-1}(x))$$

On complète $(x, u(x), \ldots, u^{p-1}(x))$ en $\mathscr{B}$ une base de E. On pose $\mathrm{P} = \mathrm{X}^p - \sum_{i=0}^{p-1} a_i \mathrm{X}^i$ et on note

$$\mathscr{C}(\mathrm{P}) = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & \ldots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & a_{p-1} \end{pmatrix}$$

De plus, on a la matrice par blocs $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} u = \left(\begin{array}{c|c} \mathscr{C}(\mathrm{P}) & \mathrm{A} \\ \hline 0 & \mathrm{B} \end{array}\right)$ d'où $\chi_u = \chi_{\mathscr{C}(\mathrm{P})} \times \chi_{\mathrm{B}}$. Avec l'opération $\mathrm{L}_1 \leftarrow \sum_{i=1}^{p} \mathrm{X}^{i-1} \mathrm{L}_i$, on obtient

$$\chi_{\mathscr{C}(\mathrm{P})} = \begin{vmatrix} \mathrm{X} & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & \mathrm{X} & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & \mathrm{X} - a_{p-1} \end{vmatrix} = \mathrm{P}$$

Par suite, on obtient $\qquad \chi_u(u)(x) = \chi_{\mathrm{B}}(u) \circ \mathrm{P}(u)(x) = 0$

Enfin, l'endomorphisme $\chi_u(u)$ s'annule évidemment en 0_{E} et le résultat est démontré.
Variante. Pour le calcul de $\chi_{\mathscr{C}(\mathrm{P})}$, on peut aussi procéder par récurrence sur le degré de P en développant sur la première ligne. On trouve

$$\chi_{\mathscr{C}(\mathrm{P})} = \mathrm{X}\chi_{\mathscr{C}(\mathrm{Q})} - a_0 \quad \text{avec} \quad \mathrm{Q} = \mathrm{X}^{p-1} - \sum_{i=0}^{p-2} a_{i+1} \mathrm{X}^i$$

L'hérédité permet de clore la récurrence. □

Remarque : Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On ne peut pas remplacer naïvement X par A dans $\det(\mathrm{XI}_n - \mathrm{A})$, même si c'est tentant. En effet, ceci revient à remplacer $\mathrm{XI}_n - \mathrm{A}$ par zéro puis à calculer un déterminant alors qu'en développant le déterminant, le morphisme d'évaluation envoie $(\mathrm{XI}_n - \mathrm{A})_{i,j} = \mathrm{X}\delta_{i,j} - a_{i,j}$ sur $\mathrm{A}\delta_{i,j} - a_{i,j}\mathrm{I}_n$.

IV Polynôme minimal

Les définitions et résultats vectoriels qui suivent existent à l'identique pour des matrices.

1 Définition

Proposition 18. *Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. L'idéal des polynômes annulateurs de u n'est pas réduit à $\{0\}$.*

Démonstration. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, cet idéal contient χ_u polynôme non nul. □

Remarque : Notant $n = \dim \mathrm{E}$, on peut éviter le recours à Cayley-Hamilton en observant que $(\mathrm{id}\,, u, \dots, u^{n^2})$ est une famille de $n^2 + 1$ vecteurs dans $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ de dimension n^2 d'où l'existence d'un polynôme annulateur de u.

Définition 14. *Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. On appelle* polynôme minimal *de u noté π_u le polynôme unitaire qui engendre l'idéal des polynômes annulateurs de u.*

Remarques : (1) Comme l'idéal des polynômes annulateurs n'est pas réduit à $\{0\}$, il existe un unique polynôme unitaire qui l'engendre.
(2) En dimension infinie, cette définition reste valable à condition que l'idéal ne soit pas réduit à $\{0\}$ (ce qui n'est plus garanti).

Théorème 9. *Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. Le polynôme π_u est l'unique polynôme unitaire annulateur de u qui divise tout polynôme annulateur de u.*

Démonstration. L'ensemble des polynômes annulant u étant un idéal de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ non réduit à $\{0\}$, le résultat suit par définition de π_u. □

2 Propriétés

Proposition 19. *Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. On a $\deg \pi_u \geqslant 1$ et $\pi_u | \chi_u$.*

Démonstration. Si $\deg \pi_u = 0$, alors $\pi_u = 1$ et par suite $\pi_u(u) = \mathrm{id} \neq 0$. Puis, on a $\chi_u \in \pi_u \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ d'où $\pi_u | \chi_u$. □

Proposition 20. *Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. On a $\deg \pi_u = 1$ si et seulement si $u \in \mathrm{Vect}\,(\mathrm{id}\,)$.*

Démonstration. Si $\deg \pi_u = 1$, alors $\pi_u = \mathrm{X} - \alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{K}$ et

$$\pi_u(u) = 0 \iff u - \alpha\,\mathrm{id} = 0$$

Si $u = \alpha\,\mathrm{id}$ avec $\alpha \in \mathbb{K}$, alors $\mathrm{X} - \alpha$ est annulateur de u or $\pi_u | \mathrm{X} - \alpha$ et $\deg \pi_u \geqslant 1$ avec π_u unitaire d'où $\pi_u = \mathrm{X} - \alpha$. □

Théorème 10. *Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. Les racines de π_u sont exactement les valeurs propres de u.*

Démonstration. Comme π_u est annulateur de u et divise χ_u, on a

$$\mathrm{Sp}\,(u) \subset \pi_u^{-1}(\{0\}) \subset \chi_u^{-1}(\{0\}) = \mathrm{Sp}\,(u)$$

Les inclusions sont donc des égalités. □

Proposition 21. *Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ et $\mathscr{B}$ une base de E. Alors, on a $\pi_{\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} u} = \pi_u$.*

Démonstration. On pose $\mathrm{A} = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}} u$ puis $\varphi_{\mathrm{A}} : \mathrm{P} \mapsto \mathrm{P}(\mathrm{A})$ et $\varphi_u : \mathrm{P} \mapsto \mathrm{P}(u)$. On a

$$\pi_{\mathrm{A}} \mathbb{K}[\mathrm{X}] = \mathrm{Ker}\ \varphi_{\mathrm{A}} = \mathrm{Ker}\ \varphi_u = \pi_u \mathbb{K}[\mathrm{X}]$$

Ainsi, les polynômes π_{A} et π_u sont associés et unitaires donc égaux. □

Proposition 22. *Deux matrices semblables ont même polynôme minimal.*

Démonstration. Conséquence de la propriété précédente. □

Exemples : 1. On a $\pi_{\mathrm{id}} = \mathrm{X} - 1$ et $\chi_{\mathrm{id}} = (\mathrm{X} - 1)^{\dim \mathrm{E}}$.
2. Pour p projecteur avec $p \neq \mathrm{id}$ et $p \neq 0$, on a $\pi_p = \mathrm{X}^2 - \mathrm{X}$ et $\chi_p = \mathrm{X}^{\dim \mathrm{Ker}\, p}(\mathrm{X} - 1)^{\mathrm{rg}\, p}$.
3. Soit $\mathrm{A} = \mathrm{diag}(1, 2, \ldots, n)$. On a $\chi_{\mathrm{A}} = \prod_{i=1}^{n} (\mathrm{X} - i)$ et $\pi_{\mathrm{A}} = \chi_{\mathrm{A}}$ puisque les racines de π_{A} et χ_{A} sont communes.

3 Lien avec l'algèbre $\mathbb{K}[u]$

Théorème 11. *Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ et $d = \deg \pi_u$. La famille $(u^k)_{k \in [\![0\,;\,d-1]\!]}$ est une base de $\mathbb{K}[u]$.*

Démonstration. Soit p entier. D'après le théorème de la division euclidienne, il existe Q, R dans $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ tels que $\mathrm{X}^p = \pi_u \mathrm{Q} + \mathrm{R}$ avec $\deg \mathrm{R} < \deg \pi_u$. En évaluant en u, il vient

$$u^p = \pi_u(u) \circ \mathrm{Q}(u) + \mathrm{R}(u) = \mathrm{R}(u) \in \mathrm{Vect}\,(u^k)_{k \in [\![0\,;\,d-1]\!]}$$

Une combinaison linéaire nulle des vecteurs de cette famille équivaut à écrire $\mathrm{R}(u) = 0$ avec $\deg \mathrm{R} < \deg \pi_u$. Si R n'est pas nul, on aurait un polynôme annulateur de u non divisible par π_u ce qui est absurde. Le résultat suit. □

Corollaire 2. *Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. On a $\dim \mathbb{K}[u] \leqslant \dim \mathrm{E}$.*

Démonstration. On a $\pi_u | \chi_u$ d'où $\dim \mathbb{K}[u] = \deg \pi_u \leqslant \deg \chi_u = \dim \mathrm{E}$. □

V Diagonalisation

1 Définition

Définition 15. *Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. L'endomorphisme u est dit* diagonalisable *s'il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que* $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} u$ *soit diagonale. La base $\mathscr{B}$ est dite* base de diagonalisation.

Remarque : Notant $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$, on a

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} u = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad \forall i \in [\![1 \,;\, n]\!] \qquad u(e_i) = \lambda_i e_i$$

Les termes diagonaux sont alors les valeurs propres de u et $\mathscr{B}$ est une base de vecteurs propres de u.

Proposition 23. *Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. On a u diagonalisable si et seulement s'il existe une base $\mathscr{B}$ de E formée de vecteurs propres de u. Une telle base est base de diagonalisation.*

Démonstration. Immédiate. □

Exemples : Homothéties vectorielles, projecteurs, symétries dans des bases adaptées.

2 Résultats de diagonalisation

Théorème 12. *Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *u diagonalisable ;*
2. $\mathrm{E} = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)} \mathrm{E}_\lambda(u)$
3. $\dim \mathrm{E} = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)} \dim \mathrm{E}_\lambda(u)$
4. *χ_u est scindé sur $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ et pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)$, $\dim \mathrm{E}_\lambda(u) = m_\lambda(u)$.*

Démonstration. Supposons u diagonalisable. Soit $\mathscr{B} = (e_i)_{i \in [\![1 \,;\, n]\!]}$ une base de diagonalisation.

On a
$$\forall i \in [\![1 \,;\, n]\!] \qquad e_i \in \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)} \mathrm{E}_\lambda(u)$$

D'où
$$\mathrm{E} = \mathrm{Vect}\,(e_i)_{i \in [\![1 \,;\, n]\!]} \subset \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)} \mathrm{E}_\lambda(u) \subset \mathrm{E}$$

et l'égalité souhaitée s'en déduit. Réciproquement, une base adaptée à la décomposition est une base de diagonalisation d'où le résultat. On a

$$\dim \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)} \mathrm{E}_\lambda(u)) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)} \dim \mathrm{E}_\lambda(u)$$

d'où l'équivalence (2) $\iff$ (3). On a $\dim \mathrm{E}_\lambda(u) \leqslant m_\lambda(u)$ pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)$ et $\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)} m_\lambda(u) \leqslant \dim \mathrm{E}$ d'où $\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)} \dim \mathrm{E}_\lambda(u) \leqslant \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)} m_\lambda(u) \leqslant \dim \mathrm{E}$. Par suite

$$\dim \mathrm{E} = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)} \dim \mathrm{E}_\lambda(u) \iff \forall \lambda \in \mathrm{Sp}\,(u) \quad \dim \mathrm{E}_\lambda(u) = m_\lambda(u) \quad \text{et} \quad \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)} m_\lambda(u) = \dim \mathrm{E}$$

L'équivalence (3) $\iff$ (4) en résulte. □

Remarque : En pratique, pour diagonaliser un endomorphisme (ou une matrice), on construit une base adaptée à la décomposition en somme directe.

Exemples : Projecteurs et symétries dans des bases adaptées.

Corollaire 3 (Condition suffisante de diagonalisation). *Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ avec $\dim \mathrm{E} = n$. Si u admet n valeurs propres deux à deux distinctes, alors u est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont des droites vectorielles.*

Démonstration. On a $\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)} \mathrm{E}_\lambda(u) \subset \mathrm{E}$ puis

$$\dim \mathrm{E} \geqslant \dim \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)} \mathrm{E}_\lambda(u) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)} \underbrace{\dim \mathrm{E}_\lambda(u)}_{\geqslant 1} \geqslant \dim \mathrm{E}$$

d'où $$\dim \mathrm{E} = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)} \dim \mathrm{E}_\lambda(u) \quad \text{et} \quad \forall \lambda \in \mathrm{Sp}\,(u) \qquad \dim \mathrm{E}_\lambda(u) = 1$$

Variante. Les valeurs propres sont exactement les racines de χ_u et $\deg \chi_u = \dim \mathrm{E}$ d'où χ_u est scindé à racines simples et

$$\forall \lambda \in \mathrm{Sp}\,(u) \qquad 1 \leqslant \dim \mathrm{E}_\lambda(u) \leqslant m_\lambda(u) = 1$$

Le résultat suit. □

3 Point de vue matriciel

Définition 16. *Une matrice* A *de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est dite* diagonalisable *si l'endomorphisme canoniquement associé $u \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^n)$ est diagonalisable.*

Proposition 24. *Une matrice* A *de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si et seulement si elle est semblable à une matrice diagonale.*

Démonstration. Immédiate. □

Remarque : Les termes diagonaux de cette matrice diagonale sont alors les valeurs propres de A.

Le théorème fondamental de diagonalisation et son corollaire, la condition suffisante de diagonalisation existe à l'identique en version matricielle.

Exemples : 1. Les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables ? Oui puisqu'elles sont toutes deux semblables à $\mathrm{diag}(1, 2)$, la condition suffisante de diagonalisation s'appliquant.

2. La matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ? Non car on a $\mathrm{rg}\,(\mathrm{A} - \mathrm{I}_3) = 2$ d'où $\dim \mathrm{E}_1(\mathrm{A}) = 1 < 2 = m_1(\mathrm{A})$.

Proposition 25. *Notons $\mathscr{C}$ base canonique de $\mathbb{K}^n$. Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. On a*

$$\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} \text{ diagonale} \iff \mathrm{P} \text{ matrice de passage de } \mathscr{C} \text{ à } \mathscr{B} \text{ une base de vecteurs propres de A}$$

Démonstration. Immédiate puisque $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$ est la matrice de l'endomorphisme canoniquement associé à A écrit dans une base dont le passage depuis la base canonique est réalisé par la matrice P. □

Exemples : 1. Réduction de $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

On trouve $$\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \mathrm{diag}(1,2,3) \quad \text{avec} \quad \mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Réduction de $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

On trouve $$\mathrm{P}^{-1}\mathrm{BP} = \mathrm{diag}(5,5,0) \quad \text{avec} \quad \mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

4 Polynômes annulateurs et diagonalisabilité

Théorème 13. *Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *u diagonalisable ;*
2. *il existe un polynôme scindé à racines simples annulant u ;*
3. *π_u est scindé à racines simples.*

Démonstration. Supposons u diagonalisable. Soit $\mathscr{B}$ une base de vecteurs propres de u. Pour $x \in \mathscr{B}$, on a $u(x) = \mu x$ avec $\mu \in \mathbb{K}$. On pose $\mathrm{P} = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)} (\mathrm{X} - \lambda)$. On a

$$\mathrm{P} = \left[\prod_{\lambda \neq \mu} (\mathrm{X} - \lambda)\right] (\mathrm{X} - \mu)$$

D'où $$\mathrm{P}(u)(x) = (\ldots)(u) \circ (u - \mu\,\mathrm{id}\,)(x) = 0$$

Ainsi, $\mathrm{P}(u)$ s'annule sur une base de E donc $\mathrm{P}(u) = 0$ et P est scindé à racines simples. S'il existe un polynôme scindé à racines simples annulant u, alors π_u est également à racines simples puisque π_u divise ce polynôme annulateur. Enfin, supposons π_u scindé à racines simples, autrement dit $\pi_u = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)} (\mathrm{X} - \lambda)$. Avec le lemme des noyaux, il vient

$$\mathrm{E} = \mathrm{Ker}\ \pi_u(u) = \mathrm{Ker} \bigcirc_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)} (u - \lambda\,\mathrm{id}\,) = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)} \mathrm{E}_\lambda(u)$$

□

Remarque : On dispose du même résultat pour des matrices.

Proposition 26. *Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ et F sev stable par u. Alors π_{u_F} divise π_u.*

Démonstration. On a $\pi_u(u_F) = 0_{\mathscr{L}(F)}$ puisque $\pi_u(u_F)(x) = \pi_u(u)(x)$ pour $x \in F$. Le résultat suit. $\square$

Théorème 14. *Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ et F sev stable par u. Si u est diagonalisable, alors u_F l'est aussi.*

Démonstration. Comme π_{u_F} divise π_u qui est scindé à racines simples, alors π_{u_F} l'est aussi et le résultat suit. $\square$

VI Trigonalisation

1 Définition

Définition 17. *Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. L'endomorphisme u est dit* trigonalisable *s'il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que $\text{mat}_{\mathscr{B}} u$ est triangulaire supérieure. La base $\mathscr{B}$ est dite* base de trigonalisation.

Remarque : Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de trigonalisation de u. On note $F_k = \text{Vect}\,(e_1, \ldots, e_k)$ pour $k \in [\![1 \,;\, n]\!]$. On a

$$\forall k \in [\![1 \,;\, n]\!] \qquad u(e_k) \in F_k \quad \text{et} \quad u(F_k) \subset F_k$$

Définition 18. *Une matrice A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est dite* trigonalisable *si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure.*

Proposition 27. *Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On a A trigonalisable si et seulement si l'endomorphisme canoniquement associé $u \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^n)$ est trigonalisable.*

Démonstration. Immédiate. $\square$

Remarque : Une matrice triangulaire inférieure est trigonalisable. En effet, si $A = \text{mat}_{\mathscr{C}} u$ est triangulaire inférieure avec $u \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^n)$ et $\mathscr{C} = (e_1, \ldots, e_n)$ base canonique de $\mathbb{K}^n$, alors $\text{mat}_{\mathscr{L}} u$ est triangulaire supérieure avec $\mathscr{L} = (e_n, \ldots, e_1)$.

2 Résultats de trigonalisation

Les résultats vectoriels qui suivent existent à l'identique pour des matrices.

Théorème 15. *Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. L'endomorphisme u est trigonalisable si et seulement si χ_u est scindé sur $\mathbb{K}[X]$.*

Démonstration. Le sens direct est immédiat. Pour le sens indirect, on procède par récurrence sur $n = \dim E$. C'est immédiat pour $n = 1$. Supposons que la propriété est vraie en dimension $n - 1$. Comme χ_u est scindé, il existe au moins une valeur propre $\lambda \in \mathbb{K}$. Soit x vecteur propre associé. On complète (x) en une base $\mathscr{B}$ de E. Ainsi, on a

$$\text{mat}_{\mathscr{B}} u = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & L \\ \hline 0 & A \end{array}\right) \qquad \text{avec} \quad L \in \mathscr{M}_{1,n-1}(\mathbb{K}) \quad \text{et} \quad A \in \mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{K})$$

On a $\chi_u = (X - \lambda)\chi_A$ et comme χ_u est scindé, il en résulte que χ_A l'est aussi. Par hypothèse de récurrence appliquée à l'endomorphisme canoniquement associée à A, il existe $Q \in GL_{n-1}(\mathbb{K})$ tel que $Q^{-1}AQ$ est triangulaire. On définit la matrice diagonale par blocs $P = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & Q \end{array}\right)$. Sans difficulté, c'est une matrice inversible d'inverse $\mathrm{P}^{-1}=\left(\begin{array}{c|c}1 & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{Q}^{-1}\end{array}\right)$. En effectuant des produits par blocs, il vient

$$\mathrm{P}^{-1}\left(\begin{array}{c|c}\lambda & \mathrm{L} \\ \hline 0 & \mathrm{A}\end{array}\right)\mathrm{P}=\mathrm{P}^{-1}\left(\begin{array}{c|c}\lambda & \mathrm{LQ} \\ \hline 0 & \mathrm{AQ}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c}\lambda & \mathrm{LQ} \\ \hline 0 & \mathrm{Q}^{-1}\mathrm{AQ}\end{array}\right)$$

qui est triangulaire ce qui clôt la récurrence. □

Corollaire 4. *Tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie est trigonalisable. Toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.*

Démonstration. Conséquence du théorème de d'Alembert-Gauss : tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$ est scindé sur $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$. □

Remarques : (1) Dans E un $\mathbb{C}$-ev et $u\in\mathscr{L}(\mathrm{E})$, on a $\mathrm{Sp}\,(u)\neq\varnothing$.
(2) Le résultat du corollaire est faux dans un $\mathbb{R}$-ev. En considérant $u\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$ canoniquement associé à $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}0 & -1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}$, on a $\chi_{\mathrm{A}}=\mathrm{X}^2+1$ non scindé dans $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$.
(3) Selon le corps des scalaires considérés, les résultats de réduction matricielle peuvent changer radicalement. Avec l'exemple précédent, on a A diagonalisable dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ et non trigonalisable dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Proposition 28. *Soit $u\in\mathscr{L}(\mathrm{E})$. Si u est trigonalisable, alors*

$$\det(u)=\prod_{i=1}^{n}\lambda_i\quad \textit{et}\quad \mathrm{Tr}\,(u)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$$

où $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ sont les valeurs propres de u, répétées avec leurs multiplicités.

Démonstration. Il suffit de considérer une base de trigonalisation de u. □

Remarque : Le résultat sur la trace est très utile en pratique pour vérifier la cohérence du calcul d'un polynôme caractéristique de matrice.

3 Techniques de trigonalisation

3.1 En dimension deux

Proposition 29. *Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension 2. Soit $u\in\mathscr{L}(\mathrm{E})$ trigonalisable et non diagonalisable avec $\mathrm{Sp}\,(u)=\{\lambda\}$. On a*

$$\exists\mathscr{B}=(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\ \textit{base de}\ \mathrm{E}\mid \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}u=\begin{pmatrix}\lambda & 1 \\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$$

Soit (e_1,e_2) une base de E. On choisit $i_0\in[\![\,1\,;\,2\,]\!]$ tel que $(u-\lambda\,\mathrm{id}\,)(e_{i_0})\neq 0_{\mathrm{E}}$ (choix possible puisque $u-\lambda\,\mathrm{id}\neq 0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})}$ car u n'est pas diagonalisable, au plus deux essais). On pose alors

$$\varepsilon_2=e_{i_0}\qquad \varepsilon_1=(u-\lambda\,\mathrm{id}\,)(\varepsilon_2)$$

On vérifie la liberté de $\mathscr{B}=(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ et compte-tenu des choix des vecteurs, on a $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}u$ de la forme souhaitée.

3.2 En dimension trois

Proposition 30. *Soit* E *un* $\mathbb{K}$*-ev de dimension 3. Soit* $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ *trigonalisable non diagonalisable. Si* $\mathrm{Sp}\,(u) = \{\lambda, \mu\}$ *avec* $\lambda \neq \mu$, λ *valeur propre double, on a*

$$\exists \mathscr{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \text{ base de E} \mid \mathrm{mat}_{\mathscr{B}} u = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \text{ dans } \mathscr{B} = (\varepsilon_3, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$$

Soit (e_1, e_2, e_3) une base de E. On cherche $i_0 \in [\![1\,;\,3]\!]$ tel que $(u - \lambda\,\mathrm{id}\,) \circ (u - \mu\,\mathrm{id}\,)(e_{i_0}) \neq 0_{\mathrm{E}}$ (choix possible puisque $(u - \lambda\,\mathrm{id}\,) \circ (u - \mu\,\mathrm{id}\,) \neq 0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})}$ car u n'est pas diagonalisable, au plus trois essais). On pose alors

$$\varepsilon_2 = (u - \mu\,\mathrm{id}\,)(e_{i_0}) \qquad \varepsilon_1 = (u - \lambda\,\mathrm{id}\,)(\varepsilon_2)$$

que l'on complète en déterminant (ε_3) base de $\mathrm{E}_\mu(u)$. On vérifie la liberté de $\mathscr{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ et compte-tenu du choix des vecteurs, on a $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} u$ de la forme souhaitée.

Proposition 31. *Soit* E *un* $\mathbb{K}$*-ev de dimension 3. Soit* $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ *trigonalisable non diagonalisable. Si* $\mathrm{Sp}\,(u) = \{\lambda\}$, *on a*

1. *Si* $(u - \lambda\,\mathrm{id}\,)^2 \neq 0$, $\exists \mathscr{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ *base de* E $\mid \mathrm{mat}_{\mathscr{B}} u = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

2. *Si* $(u - \lambda\,\mathrm{id}\,)^2 = 0$, $\exists \mathscr{B} = \mathscr{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ *base de* E $\mid \mathrm{mat}_{\mathscr{B}} u = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ *ou* $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ *dans* $\mathscr{B} = (\varepsilon_3, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$.

Soit (e_1, e_2, e_3) une base de E. Avec $\mathrm{rg}\,(u - \lambda\,\mathrm{id}\,)$, on on détermine si on est dans la configuration 1 ou 2.

1. On cherche $i_0 \in [\![1\,;\,3]\!]$ tel que $(u - \lambda\,\mathrm{id}\,)^2(e_{i_0}) \neq 0_{\mathrm{E}}$ (choix possible car $(u - \lambda\,\mathrm{id}\,)^2 \neq 0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})}$, au plus trois essais). On pose alors

$$\varepsilon_3 = e_{i_0} \qquad \varepsilon_2 = (u - \lambda\,\mathrm{id}\,)(\varepsilon_3) \qquad \varepsilon_1 = (u - \lambda\,\mathrm{id}\,)(\varepsilon_2)$$

On vérifie la liberté de $\mathscr{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ et compte-tenu du choix des vecteurs, on a $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} u$ de la forme souhaitée.

2. On choisit $i_0 \in [\![1\,;\,3]\!]$ tel que $(u - \lambda\,\mathrm{id}\,)(e_{i_0}) \neq 0_{\mathrm{E}}$ (choix possible puisque $u - \lambda\,\mathrm{id} \neq 0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})}$ car u non diagonalisable, au plus trois essais). On pose alors

$$\varepsilon_2 = e_{i_0} \qquad \varepsilon_1 = (u - \lambda\,\mathrm{id}\,)(\varepsilon_2)$$

et on complète (ε_1) en base $(\varepsilon_1, \varepsilon_3)$ de $\mathrm{E}_\lambda(u)$. On vérifie la liberté de $\mathscr{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ et compte-tenu du choix des vecteurs, on a $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} u$ de la forme souhaitée.

Remarque : Les formes réduites obtenues sont dites *réduites de Jordan.*

Exemple : Réduire

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On trouve $$\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \mathrm{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Puis $$\mathrm{Q}^{-1}\mathrm{BQ} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \mathrm{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

VII Nilpotence

Les définitions et résultats vectoriels qui suivent existent à l'identique pour des matrices.

1 Définition, propriété

Définition 19. *Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. L'endomorphisme u est dit* nilpotent *s'il existe k entier non nul tel que $u^k = 0$. Le plus petit entier p non nul vérifiant cette propriété est appelée* indice *ou* ordre de nilpotence *de u.*

Remarques : (1) L'entier $p = \min\left\{k \in \mathbb{N}^* \mid u^k = 0\right\}$ est bien défini comme minimum d'une partie non vide de $\mathbb{N}^*$.
(2) Soit $\mathscr{B}$ une base de E. On a u nilpotente si et seulement si $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} u$ l'est puisque $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} u^k = (\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} u)^k$ pour tout k entier et dans ce cas, la matrice $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} u$ et l'endomorphisme u ont même ordre de nilpotence.

Proposition 32. *Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ nilpotent d'indice p. On a $\pi_u = \mathrm{X}^p$.*

Démonstration. On a $u^p = 0$ et $u^{p-1} \neq 0$ d'où $\pi_u | \mathrm{X}^p$ et X^k avec $k < p$ non annulateur de u d'où le résultat. ☐

Proposition 33. *Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ nilpotent. L'indice de nilpotence p de u vérifie $p \leqslant n$.*

Démonstration. Comme $\pi_u = \mathrm{X}^p | \chi_u$, il s'ensuit que $p \leqslant n$.
Variante. On peut éviter le recours à Cayley-Hamilton. Soit $x \in \mathrm{E}$ tel que $u^{p-1}(x) \neq 0_{\mathrm{E}}$. Montrons la liberté de $(x, u(x), \ldots, u^{p-1}(x))$. Soit $(\alpha_i)_{i \in [\![0\,;\, p-1]\!]} \in \mathbb{K}^p \smallsetminus \{0_{\mathbb{K}^p}\}$ tel que $\sum\limits_{i=0}^{p-1} \alpha_i u^i(x) = 0$. Notons $\ell = \min\{i \in [\![0\,;\, p-1]\!] \mid \alpha_i \neq 0\}$. On a

$$u^{p-1-\ell}\left(\sum_{i=\ell}^{p-1} \alpha_i u^i(x)\right) = \alpha_\ell u^{p-1}(x) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha_\ell = 0$$

ce qui contredit la définition de ℓ. On en déduit que $\alpha_i = 0$ pour tout $i \in [\![0\,;\, p-1]\!]$ et le cardinal d'une famille libre étant majoré par la dimension de l'espace, on obtient $p \leqslant n$. ☐

Proposition 34. *Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Si A est triangulaire supérieure stricte, alors A est nilpotente.*

Démonstration. On a $\chi_{\mathrm{A}} = \mathrm{X}^n$ et $\chi_{\mathrm{A}}(\mathrm{A}) = \mathrm{A}^n = 0$ d'après le théorème de Cayley-Hamilton. ☐

Remarque : Résultat généralisé plus bas.

2 Nilpotence et réduction

Théorème 16. *Soit* $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$*. On a*

$$u \text{ nilpotent} \iff u \text{ trigonalisable et } \mathrm{Sp}\,(u) = \{0\}$$

Démonstration. Supposons u nilpotent et soit p indice de nilpotence. Soit $\mathrm{A} = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}} u$ avec $\mathscr{B}$ une base de E. On a $\pi_{\mathrm{A}} = \pi_u = \mathrm{X}^p$ d'où $\mathrm{Sp}\,(u) = \mathrm{Sp}_{\,\mathbb{C}}(\mathrm{A}) = \{0\}$. Considérant A comme matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, comme χ_{A} est scindé dans $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$, unitaire, de degré égal à n avec zéro pour seule racine, il s'ensuit que $\chi_{\mathrm{A}} = \mathrm{X}^n$. On a donc aussi $\chi_u = \mathrm{X}^n$ d'où u trigonalisable (même si le corps des scalaires de E n'est pas $\mathbb{C}$). Réciproquement, on suppose u trigonalisable avec $\mathrm{Sp}\,(u) = \{0\}$. Dans une base de trigonalisation $\mathscr{B}$, la matrice $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} u$ est triangulaire stricte donc nilpotente.
Variante pour la réciproque. On peut éviter le recours à Cayley-Hamilton (utilisé lors de la proposition 34). On montre par récurrence forte $u^k(e_k) = 0$ pour tout $k \in [\![1\,;\, n]\!]$ d'où $u^n = 0$ ce qui prouve le résultat. On peut aussi poser $\mathrm{F}_k = \mathrm{Vect}\,(e_1, \ldots, e_k)$, vérifier que $u(\mathrm{F}_k) \subset \mathrm{F}_{k-1}$ puis montrer par récurrence que $u^k(\mathrm{F}_n) \subset \mathrm{F}_{n-k}$ d'où $u^n(\mathrm{F}_n) = \{0_{\mathrm{E}}\}$. □

Corollaire 5. *Soit* $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$*. On a u nilpotent si et seulement s'il existe une base $\mathscr{B}$ de* E *telle que* $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} u$ *est triangulaire supérieure stricte.*

Démonstration. Conséquence immédiate du résultat précédent. □

Corollaire 6. *Soit* $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$*. On a* A *nilpotente si et seulement* A *est semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte.*

Démonstration. Traduction matricielle du corollaire précédent. □

3 Polynôme minimal scindé

Théorème 17. *Soit* $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ *et* $\mathrm{P} = \prod\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)} (\mathrm{X} - \lambda)^{\alpha_\lambda}$ *annulateur de u (les α_λ entiers non nuls). On a*

$$\mathrm{E} = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)} \mathrm{F}_\lambda \quad \text{avec} \quad \mathrm{F}_\lambda = \mathrm{Ker}\,(u - \lambda\,\mathrm{id}\,)^{\alpha_\lambda} \text{ stable par } u$$

et il existe $\mathscr{B} = \biguplus\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)} \mathscr{B}_\lambda$ *base adaptée à cette décomposition en somme directe telle que*

$$\forall \lambda \in \mathrm{Sp}\,(u) \qquad \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_\lambda} u_{\mathrm{F}_\lambda} = \lambda \mathrm{I}_{m_\lambda} + \mathrm{T}_\lambda \text{ avec } \mathrm{T}_\lambda \text{ triangulaire supérieure stricte}$$

En particulier, on a $\dim \mathrm{F}_\lambda = m_\lambda$ *pour tout* $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)$ *et $\mathscr{B}$ est une base de trigonalisation.*

Démonstration. D'après le lemme des noyaux, il vient

$$\mathrm{E} = \mathrm{Ker}\ \mathrm{P}(u) = \mathrm{Ker} \bigcirc_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)} (u - \lambda\,\mathrm{id}\,)^{\alpha_\lambda} = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)} \mathrm{F}_\lambda \quad \text{avec} \quad \mathrm{F}_\lambda = \mathrm{Ker}\,(u - \lambda\,\mathrm{id}\,)^{\alpha_\lambda}$$

Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)$. On a F_λ stable par u car u commute avec $(u - \lambda\,\mathrm{id}\,)^{\alpha_\lambda} \in \mathbb{K}[u]$. Notant $n_\lambda = u_{\mathrm{F}_\lambda} - \lambda\,\mathrm{id}_{\,\mathrm{F}_\lambda}$, on a $n_\lambda \in \mathscr{L}(\mathrm{F}_\lambda)$ et $n_\lambda^{\alpha_\lambda} = 0$. D'après le corollaire précédent, il existe $\mathscr{B}_\lambda$ base de F_λ telle que $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_\lambda} n_\lambda$ soit triangulaire supérieure stricte. Ainsi, on a $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_\lambda} u_{\mathrm{F}_\lambda}$ est triangulaire supérieure. En concaténant $\mathscr{B} = \biguplus\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)} \mathscr{B}_\lambda$, on obtient une base $\mathscr{B}$ de trigonalisation de u et on a

$$\chi_u = \det(\mathrm{XI}_n - \mathrm{mat}_{\mathscr{B}} u) = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)} (\mathrm{X}-\lambda)^{\dim \mathrm{F}_\lambda} = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)} (\mathrm{X}-\lambda)^{m_\lambda}$$

la dernière expression de χ_u résultant de son caractère scindé. Il s'ensuit

$$\forall \lambda \in \mathrm{Sp}\,(u) \qquad \dim \mathrm{F}_\lambda = m_\lambda$$

□

Théorème 18. *Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *u est trigonalisable ;*
2. *il existe un polynôme scindé dans $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ annulateur de u ;*
3. *le polynôme minimal π_u est scindé dans $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$.*

On peut alors décomposer E en somme directe de sous-espaces stables par u sur lesquels u induit la somme d'une homothétie et d'un endomorphisme nilpotent.

Démonstration. (1) $\Longrightarrow$ (2) On a χ_u scindé et annulateur de u.
(2) $\Longrightarrow$ (3) Immédiat car π_u est annulateur de u et divise tout polynôme annulateur de u donc est scindé en tant que diviseur d'un polynôme scindé.
(3) $\Longrightarrow$ (1) On applique le théorème précédent avec π_u qui est scindé et dont les racines sont les éléments de $\mathrm{Sp}\,(u)$. □

Théorème 19. *Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *A est trigonalisable ;*
2. *A est semblable à une matrice diagonale par blocs $\mathrm{diag}\,(\lambda \mathrm{I}_{m_\lambda} + \mathrm{T}_\lambda)_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})}$ avec les T_λ des matrices triangulaires supérieures strictes ;*
3. *A est semblable à une matrice diagonale par blocs $\mathrm{diag}\,(\lambda \mathrm{I}_{m_\lambda} + \mathrm{N}_\lambda)_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})}$ avec les N_λ des matrices nilpotentes.*

Démonstration. (1) $\Longrightarrow$ (2) Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ où $\mathrm{E} = \mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A. On a u trigonalisable. Ainsi, χ_u (ou π_u) est scindé et on applique le résultat du théorème 17.
(2) $\Longrightarrow$ (3) Immédiate car une matrice triangulaire stricte est nilpotente.
(3) $\Longrightarrow$ (1) Soit $\mathrm{B} = \mathrm{diag}(\lambda \mathrm{I}_{m_\lambda} + \mathrm{N}_\lambda)_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})}$ semblable à A avec les N_λ nilpotentes. Pour chaque λ, il existe $\mathrm{P}_\lambda \in \mathrm{GL}_{m_\lambda}(\mathbb{K})$ telle que $\mathrm{P}_\lambda^{-1}\mathrm{N}_\lambda \mathrm{P}_\lambda$ triangulaire supérieure stricte. Avec $\mathrm{P} = \mathrm{diag}(\mathrm{P}_\lambda)_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})}$, on a P inversible et $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{BP}$ triangulaire supérieure (produit par blocs). Comme A est semblable à B, le résultat suit par transitivité. □

Définition 20. *Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ avec χ_u scindé dans $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ d'où $\chi_u = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)} (\mathrm{X}-\lambda)^{m_\lambda}$. On appelle* sous-espaces caractéristiques *de u les sev $\mathrm{Ker}\,(u - \lambda\,\mathrm{id}\,)^{m_\lambda}$ pour $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)$.*

Corollaire 7. *Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ avec χ_u scindé dans $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ d'où $\chi_u = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)} (\mathrm{X}-\lambda)^{m_\lambda}$. On a*

$$\mathrm{E} = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)} \mathrm{Ker}\,(u - \lambda\,\mathrm{id}\,)^{m_\lambda}$$

et il existe une base adaptée $\mathscr{B}$ adaptée à cette décomposition en somme directe telle que

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} u = \mathrm{diag}\,(\lambda \mathrm{I}_{m_\lambda} + \mathrm{T}_\lambda)_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)} \text{ avec les } \mathrm{T}_\lambda \text{ des matrices triangulaires supérieures strictes}$$

Démonstration. C'est le théorème 17 appliqué avec $\mathrm{P} = \chi_u$. □

Remarque : En pratique, c'est souvent le polynôme caractéristique χ_u qui est le polynôme annulateur de u le plus accessible pour appliquer ce résultat.

VIII Des applications de la réduction

1 Détermination d'une puissance p-ième

• Cas où A diagonalisable

$$\exists \mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \mid \mathrm{A} = \mathrm{PDP}^{-1} \Longrightarrow \mathrm{A}^p = \mathrm{PD}^p\mathrm{P}^{-1}$$

• Cas où A trigonalisable

$$\exists (\mathrm{B}, \mathrm{N}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \mid \mathrm{A} = \mathrm{B} + \mathrm{N} \quad \text{avec} \quad \mathrm{B} \text{ diagonalisable, N nilpotente et BN} = \mathrm{NB}$$

En effet, on a A semblable à $\mathrm{D} + \mathrm{T}$ avec $\mathrm{D} = \mathrm{diag}(\lambda_1 \mathrm{I}_{m_1}, \ldots, \lambda_r \mathrm{I}_{m_r})$ et $\mathrm{T} = \mathrm{diag}(\mathrm{T}_1, \ldots, \mathrm{T}_r)$ et un produit par blocs montre que $\mathrm{DT} = \mathrm{TD}$. Soit ℓ indice de nilpotence de N. On applique la formule du binôme (car commutation)

$$\mathrm{A}^p = (\mathrm{B} + \mathrm{N})^p = \sum_{k=0}^{\min(p,\ell-1)} \binom{p}{k} \mathrm{B}^{p-k}\mathrm{N}^k$$

L'intérêt de ce développement est qu'il contient au plus ℓ termes, même si p est très grand.

• Avec un polynôme annulateur

Si P est annulateur de A, il existe $(\mathrm{Q}_p, \mathrm{R}_p) \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]^2$ tel que $\mathrm{X}^p = \mathrm{PQ}_p + \mathrm{R}_p$ avec $\deg \mathrm{R}_p < p$ d'où

$$\mathrm{A}^p = \mathrm{R}_p(\mathrm{A})$$

2 Récurrences croisées

Résolution de problème de la forme $\mathrm{X}_{n+1} = \mathrm{AX}_n$ pour n entier avec $\mathrm{X}_0 \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ et détermination de X_n pour un n fixé. La suite (matricielle) $(\mathrm{X}_n)_n$ suit une progression géométrique. Une récurrence immédiate donne

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{X}_n = \mathrm{A}^n\mathrm{X}_0$$

On s'est donc ramené à un problème de détermination de puissance d'une matrice.

Exemple : Expressions des suites (a_n) et (b_n) vérifiant $\begin{cases} a_{n+1} & = -2b_n \\ b_{n+1} & = a_n + 3b_n \end{cases}$.

Posons $\mathrm{X}_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ et $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Le problème s'écrit matriciellement $\mathrm{X}_{n+1} = \mathrm{AX}_n$. On réduit A ou on utilise le fait que $\chi_{\mathrm{A}}(\mathrm{A}) = 0 \ldots$

3 Suites récurrentes linéaires

Définition 21. *Une suite $(u_n)_n$ de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est* récurrente linéaire d'ordre p *(SRL(p) en abrégé) si elle vérifie une relation de la forme*

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+p} = a_{p-1}u_{n+p-1} + \ldots + a_0 u_n \tag{H}$$

avec $a_0, \ldots, a_{p-1}$ des scalaires et $a_0 \neq 0$.

Théorème 20. *Soient $a_0, \ldots, a_{p-1}$ des scalaires avec $a_0 \neq 0$ et la relation de récurrence linéaire*

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+p} = a_{p-1}u_{n+p-1} + \ldots + a_0 u_n \tag{H}$$

L'espace $\mathrm{S_H}$ des solutions est un $\mathbb{K}$-ev de dimension p.

Démonstration. C'est clairement un sev de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Posant $\mathrm{P} = \mathrm{X}^p - \sum_{i=0}^{p-1} a_i \mathrm{X}^i$, $\mathrm{E} = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $\sigma : \mathrm{E} \to \mathrm{E}, (u_n)_n \mapsto (u_{n+1})_n$, on a $\sigma \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ et on peut aussi observer $\mathrm{S_H} = \mathrm{Ker}\,\mathrm{P}(\sigma)$ (remarque culturelle). L'application $\Phi_0 : \mathrm{S_H} \to \mathbb{K}^p, (u_n)_n \mapsto (u_0, \ldots, u_{p-1})$ est un isomorphisme d'après le principe de récurrence (injective et surjective). En effet, la suite $(u_n)_n$ est complètement déterminée par ses p premiers termes et on peut les choisir arbitrairement. □

Proposition 35. *Soit $(u_n)_n$ vérifiant*

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+p} = a_{p-1} u_{n+p-1} + \ldots + a_0 u_n$$

avec $a_0, \ldots, a_{p-1}$ des scalaires et $a_0 \neq 0$. Posant ${\mathrm{X}_n}^\top = \begin{pmatrix} u_n & \ldots & u_{n+p-1} \end{pmatrix}$. On a

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{X}_{n+1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 \\ a_0 & \ldots & \ldots & \ldots & a_{p-1} \end{pmatrix}}_{=\mathrm{A}} \mathrm{X}_n = \mathrm{A}\mathrm{X}_n$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{X}_n = \mathrm{A}^n \mathrm{X}_0$$

Vocabulaire : On appellera A la matrice *compagne* (ou *compagnon*) de la suite $(u_n)_n$.

Démonstration. Il suffit d'écrire

$$\mathrm{X}_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ \ldots \\ a_{p-1} u_{n+p-1} + \ldots + a_0 u_n \end{pmatrix}$$

La relation vectorielle obtenue est géométrique et une récurrence immédiate fournit le résultat sur X_n. □

Remarque : On se ramène donc à un calcul de puissance matricielle.

Théorème 21. *Soit la relation récurrente linéaire d'ordre 2 définie par*

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n \tag{H}$$

avec $(a, b) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}^*$. L'équation caractéristique (R) *est*

$$r^2 - ar - b = 0$$

1. *Si* (R) *admet deux racines α, β distinctes*
$$(u_n)_n \in \mathrm{S_H} \iff \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \quad | \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = \lambda \alpha^n + \mu \beta^n$$
2. *Si* (R) *admet une racine double α*
$$(u_n)_n \in \mathrm{S_H} \iff \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \quad | \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = (\lambda + \mu n) \alpha^n$$
3. *Si $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ et* (R) *admet deux racines complexes conjuguées $\rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ et $\rho \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$ avec $\rho > 0$ et $\theta \not\equiv 0\ [\pi]$*
$$(u_n)_n \in \mathrm{S_H} \iff \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = \rho^n (\lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta))$$

Remarque : Le troisième cas (qui est un sous-cas du premier) fournit une expression réelle d'une suite réelle solution.

Démonstration. Soit $\mathrm{E} = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On note $\sigma : \mathrm{E} \to \mathrm{E}, (u_n)_n \mapsto (u_{n+1})_n$. On a clairement $\sigma \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. Notant $\mathrm{P} = \mathrm{X}^2 - a\mathrm{X} - b$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \iff (u_n)_n \in \operatorname{Ker} \mathrm{P}(\sigma)$$

1. Si (R) admet deux racines distinctes α et β, il vient d'après le lemme des noyaux

$$\operatorname{Ker} \mathrm{P}(\sigma) = \operatorname{Ker}(\sigma - \alpha \operatorname{id}) \oplus \operatorname{Ker}(\sigma - \beta \operatorname{id})$$

d'où le résultat.

3. Si (R) admet deux racines complexes conjuguées $\rho \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\theta}$ ($\rho > 0$ et $\theta \not\equiv 0[\pi]$), notant $\alpha = \rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, la suite $(\alpha^n)_n$ est solution d'après le cas 1, d'où

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \alpha^{n+2} = a\alpha^{n+1} + b\alpha^n$$

et considérant partie réelle et imaginaire, les suites $(\rho^n \cos(n\theta))_n$ et $(\rho^n \sin(n\theta))_n$ sont des solutions réelles. Enfin, elles forment une libre donc constitue une base du plan vectoriel réel $\operatorname{Ker} \mathrm{P}(\sigma)$.

2. Si (R) admet une racine double α (non nulle), on pose $e_\alpha = (\alpha^n)_n$ et $u = e_\alpha v$ pour $u \in \mathrm{E}$ (c'est-à-dire $v = e_{1/\alpha} u$). On trouve $(\sigma - \alpha \operatorname{id})(u) = \alpha e_\alpha (\sigma - \operatorname{id})(v)$ puis

$$(\sigma - \alpha \operatorname{id})^2(u) = \alpha^2 e_\alpha (\sigma - \operatorname{id})^2(v) = 0 \iff v \in \operatorname{Ker}(\sigma - \operatorname{id})^2$$

et $\qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad (\sigma - \operatorname{id})^2(v)_n = v_{n+2} - 2v_{n+1} - v_n = v_{n+2} - v_{n+1} - (v_{n+1} - v_n)$

Ainsi, on a $v \in \operatorname{Ker}(\sigma - \operatorname{id})^2$ si et seulement si la suite $(v_{n+1} - v_n)_n$ est constante, autrement dit $v_n = \lambda + \mu n$ pour n entier avec λ, μ scalaires. Le résultat suit. $\square$

Remarque : On a $\operatorname{Ker} \sigma = \operatorname{Vect}((\delta_{0,n})_n)$ et $\operatorname{Ker} \sigma^2 = \operatorname{Vect}((\delta_{0,n})_n, (\delta_{1,n})_n)$. On peut ainsi compléter la description des solutions sans l'hypothèse b non nul.

Annexes

Proposition 29. *Soit* E *un* $\mathbb{K}$*-ev de dimension 2. Soit* $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ *trigonalisable et non diagonalisable avec* $\mathrm{Sp}\,(u) = \{\lambda\}$*. On a*

$$\exists \mathscr{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \text{ base de E} \mid \mathrm{mat}_{\mathscr{B}} u = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Démonstration. Soit (e_1, e_2) une base de E. On a χ_u scindé mais pas à racines simples sinon u serait diagonalisable d'où $\chi_u = (\mathrm{X} - \lambda)^2$. On choisit $i_0 \in [\![1\,;\,2]\!]$ tel que $(u - \lambda\,\mathrm{id}\,)(e_{i_0}) \neq 0_{\mathrm{E}}$. Ce choix est possible car si $u - \lambda\,\mathrm{id}$ s'annule sur la base (e_1, e_2), alors on aurait $u = \lambda\,\mathrm{id}$. On pose alors

$$\varepsilon_2 = e_{i_0} \qquad \varepsilon_1 = (u - \lambda\,\mathrm{id}\,)(\varepsilon_2)$$

On applique $u - \lambda\,\mathrm{id}$ à une combinaison linéaire de $\mathscr{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ et, en utilisant $\chi_u(u) = 0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})}$, on obtient la liberté de $\mathscr{B}$. La matrice de u dans $\mathscr{B}$ a la forme attendue. □

En dimension trois

Proposition 30. *Soit* E *un* $\mathbb{K}$*-ev de dimension 3. Soit* $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ *trigonalisable non diagonalisable. Si* $\mathrm{Sp}\,(u) = \{\lambda, \mu\}$ *avec* $\lambda \neq \mu$*,* λ *valeur propre double, on a*

$$\exists \mathscr{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \text{ base de E} \mid \mathrm{mat}_{\mathscr{B}} u = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \text{ dans } \mathscr{B} = (\varepsilon_3, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$$

Démonstration. Soit (e_1, e_2, e_3) une base de E. On a $\chi_u = (\mathrm{X}-\lambda)^2(\mathrm{X}-\mu)$. On choisit $i_0 \in [\![1\,;\,3]\!]$ tel que $(u - \lambda\,\mathrm{id}\,) \circ (u - \mu\,\mathrm{id}\,)(e_{i_0}) \neq 0_{\mathrm{E}}$. Ce choix est possible car si $(u - \lambda\,\mathrm{id}\,) \circ (u - \mu\,\mathrm{id}\,)$ s'annule sur la base (e_1, e_2, e_3), alors cette application est nulle et on aurait $(\mathrm{X} - \lambda)(\mathrm{X} - \mu)$ scindé à racines simples et annulateur de u qui contredit u non diagonalisable. On pose alors

$$\varepsilon_2 = (u - \mu\,\mathrm{id}\,)(e_{i_0}) \qquad \varepsilon_1 = (u - \lambda\,\mathrm{id}\,)(\varepsilon_2)$$

que l'on complète en déterminant (ε_3) base de $\mathrm{E}_\mu(u)$. On applique $(u - \lambda\,\mathrm{id}\,)^2$ puis $u - \lambda\,\mathrm{id}$ à une combinaison linéaire de $\mathscr{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ et, en utilisant $\chi_u(u) = 0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})}$, on obtient la liberté de $\mathscr{B}$. La matrice de u dans $\mathscr{B}$ a la forme attendue. □

Proposition 31. *Soit* $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ *trigonalisable non diagonalisable. Si* $\mathrm{Sp}\,(u) = \{\lambda\}$*, on a*

1. *Si* $(u - \lambda\,\mathrm{id}\,)^2 \neq 0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})}$*,* $\exists \mathscr{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ *base de* E $\mid \mathrm{mat}_{\mathscr{B}} u = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

2. *Si* $(u - \lambda\,\mathrm{id}\,)^2 = 0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})}$*,* $\exists \mathscr{B} = \mathscr{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ *base de* E $\mid \mathrm{mat}_{\mathscr{B}} u = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ *ou* $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ *dans* $\mathscr{B} = (\varepsilon_3, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$.

Démonstration. Soit (e_1, e_2, e_3) une base de E. On a $\chi_u = (\mathrm{X} - \lambda)^3$.

1. Si $(u - \lambda\,\mathrm{id}\,)^2 \neq 0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})}$, on cherche $i_0 \in [\![1\,;\,3]\!]$ tel que $(u - \lambda\,\mathrm{id}\,)^2(e_{i_0}) \neq 0_{\mathrm{E}}$. On pose alors

$$\varepsilon_3 = e_{i_0} \qquad \varepsilon_2 = (u - \lambda\,\mathrm{id}\,)(\varepsilon_3) \qquad \varepsilon_1 = (u - \lambda\,\mathrm{id}\,)(\varepsilon_2)$$

On applique $(u-\lambda\,\mathrm{id}\,)^2$ puis $u-\lambda\,\mathrm{id}$ à une combinaison linéaire de $\mathscr{B}=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$ et, en utilisant $\chi_u(u)=0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})}$, on obtient la liberté de $\mathscr{B}$. La matrice de u dans $\mathscr{B}$ a la forme attendue.

2. Si $(u-\lambda\,\mathrm{id}\,)^2=0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})}$, on choisit $i_0\in[\![1\,;\,3]\!]$ tel que $(u-\lambda\,\mathrm{id}\,)(e_{i_0})\neq 0_{\mathrm{E}}$. Ce choix est possible car si $u-\lambda\,\mathrm{id}$ s'annule sur la base (e_1,e_2,e_3), alors on aurait $u=\lambda\,\mathrm{id}$. On pose alors

$$\varepsilon_2=e_{i_0}\qquad \varepsilon_1=(u-\lambda\,\mathrm{id}\,)(\varepsilon_2)$$

et on complète (ε_1) en base $(\varepsilon_1,\varepsilon_3)$ de $\mathrm{E}_\lambda(u)$. Ceci est possible. En effet, on a $\mathrm{Im}\,(u-\lambda\,\mathrm{id}\,)\subset\mathrm{Ker}\,(u-\lambda\,\mathrm{id}\,)$ et $\mathrm{Ker}\,(u-\lambda\,\mathrm{id}\,)\neq\mathrm{E}$. D'après le théorème du rang et l'inclusion précédente, on a $\mathrm{rg}\,(u-\lambda\,\mathrm{id}\,)=1$ et $\dim\mathrm{Ker}\,(u-\lambda\,\mathrm{id}\,)=2$. Enfin, on applique $u-\lambda\,\mathrm{id}$ à une combinaison linéaire de $\mathscr{B}=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$ et, en utilisant $\chi_u(u)=0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})}$, on obtient la liberté de $\mathscr{B}$. La matrice de u dans $\mathscr{B}$ a la forme attendue. □

Suites récurrentes linéaires d'ordre deux

On propose une preuve différente du théorème de résolution des suites récurrentes linéaires d'ordre deux.

Théorème 20. *Soit (u_n) une suite récurrente linéaire d'ordre deux vérifiant*

$$\forall n\in\mathbb{N}\qquad u_{n+2}=au_{n+1}+bu_n \tag{H}$$

avec $(a,b)\in\mathbb{K}\times\mathbb{K}^*$. L'équation caractéristique (R) *est*

$$r^2-ar-b=0$$

1. *Si* (R) *admet deux racines α,β distinctes, alors*
$$\exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2\quad|\quad\forall n\in\mathbb{N}\qquad u_n=\lambda\alpha^n+\mu\beta^n$$
2. *Si* (R) *admet une racine double α, alors*
$$\exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2\quad|\quad\forall n\in\mathbb{N}\qquad u_n=(\lambda+\mu n)\alpha^n$$
3. *Si $(a,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$ et* (R) *admet deux racines complexes conjuguées $\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ et $\rho\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$, alors*
$$\exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\quad|\quad\forall n\in\mathbb{N}\qquad u_n=\rho^n(\lambda\cos(n\theta)+\mu\sin(n\theta))$$

Démonstration. On a

$$\chi_{\mathrm{A}}=\begin{vmatrix}\mathrm{X} & -1\\ -b & \mathrm{X}-a\end{vmatrix}=\mathrm{X}^2-a\mathrm{X}-b$$

Les racines de l'équation caractéristiques sont donc exactement les valeurs propres de A.

1. Si (R) admet deux racines distinctes α,β, la matrice A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$ d'après la condition suffisante de diagonalisation et il existe donc $\mathrm{P}\in\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ et $\mathrm{D}=\mathrm{diag}(\alpha,\beta)$ telle que $\mathrm{A}=\mathrm{PDP}^{-1}$ puis $\mathrm{A}^n=\mathrm{PD}^n\mathrm{P}^{-1}$ pour n entier et ainsi

$$\begin{pmatrix}u_n\\ u_{n+1}\end{pmatrix}=\mathrm{P}\begin{pmatrix}\alpha^n & 0\\ 0 & \beta^n\end{pmatrix}\mathrm{P}^{-1}\begin{pmatrix}u_0\\ u_1\end{pmatrix}$$

d'où le résultat.

3. Si (R) admet deux racines complexes conjuguées $\rho\mathrm{e}^{\pm\,\mathrm{i}\theta}$ et $(a,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$, Le résultat précédent s'applique d'où

$$\forall n\in\mathbb{N}\qquad u_n=\lambda\rho^n\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}n\theta}+\mu\rho^n\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}$$

avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$. Les suite $(\mathrm{Re}\ \rho^n \mathrm{e}^{in\theta})_n$ et $(\mathrm{Im}\ \rho^n \mathrm{e}^{in\theta})_n$ sont solutions réelles et on vérifie sans peine qu'elles forment une famille libre donc une base du plan vectoriel réel $\mathrm{S_H}$.

3. Si (R) admet une racine double α, la matrice A n'est pas diagonalisable sinon elle serait semblable à $\alpha \mathrm{I}_2$ donc égale à cette matrice. Il existe $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ telle que

$$\mathrm{A} = \mathrm{PTP}^{-1} \quad \text{avec} \quad \mathrm{T} = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

Une récurrence ou une application du binôme donne

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{T}^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & n\alpha^{n-1} \\ 0 & \alpha^n \end{pmatrix}$$

Puis
$$u_n = \lambda \alpha^n + \nu n \alpha^{n-1} = \alpha^n(\lambda + n\nu/\alpha)$$

avec (λ, ν) des scalaires et $\alpha \neq 0$ car $\chi_{\mathrm{A}}(0) = b \neq 0$. □